π

Ecricome | Mathématiques | 2025
En cours de rédaction a partir d'un modèle

1 Exercice N° 01 :

Enoncé :

A l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e3}{2}} 12\text{x}^2 ln(2x)dx$$

Correction :

$\mapsto$ Rappel de la formule de l'intégration par partie : $\int [u'v] = [uv] - \int \text{u}v'$

Il faut choisir le u' à primitiver et le v à dériver. Pour cela on retiens un v qui se dérive facilement.

- $v = ln(2x)$ et $v' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$
- $u' = 12x^2$ et $u = 12 * \frac{x^3}{3} = 4x^3$

Nous avons donc : $I = [4x^3 * ln(2x)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e3}{2}} (4x^3 * \frac{1}{x})dx \mapsto$ [Élément 1 - élément 2].

Remplaçons les deux éléments par leurs bornes inférieures et les supérieures :

- $\mapsto$ Élément 1 : $4 * (\frac{e^3}{2})^3 ln(2 * \frac{e^3}{2}) - [4 * (\frac{1}{2})^3 * ln(2 * \frac{1}{2})] = \left[4 * \frac{e^9}{8} * ln(e^3)\right] - [4 * \frac{1}{8} * ln(1)]$
- $\mapsto$ Élément 2 primitivé : $(4x^3 * \frac{1}{x})dx = \frac{4x^3}{x} = 4x^2 - \left[4 * \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{e^{\frac{3}{2}}} = \left[4 * \frac{(\frac{e^3}{2})^3}{3} - 4 * \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}\right]$

Ce qui donne : $I = \left[4 * \frac{e^9}{8} * ln(e^3)\right] - [4 * \frac{1}{8} * ln(1)] - \left[4 * \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}\right]$

- $= \frac{12}{8} * e^9 - 0 - \frac{4}{3} * (\frac{e^3}{2})^3 + \frac{4}{3} * \frac{1}{8}$
- $= \frac{3}{2} * e^9 - \frac{4}{3} * \frac{e^9}{8} + \frac{1}{6}$

$$I = e^9 * (\frac{4}{3}) + \frac{1}{6}$$

2 Exercice N° 02 :

Enoncé :

Déterminer la fonction réciproque $h(x)$, en précisant les ensembles de départ et d'arrivée,

$h(x)$ définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{3};+\propto[$, par $h(y) = \frac{5}{ln(3y+2)}$

Correction :

$\mapsto$ Rappel de la fonction réciproque : $f(a) = b$ sur $D^f \Leftrightarrow g(b) = a$ sur D^g ou $f^{-1}(b) = a$

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction réciproque il suffit de calculer les images des bornes du domaine de h. Mais attention les bornes sont ici exclues. On va donc calculer les limites.

Soit le fonction $h(y) = \frac{5}{ln(3y+2)}$ définie sur le domaine $[-\frac{1}{3};+\propto[$ $et -\frac{1}{3} \approx 3*(-0,3332)+2 = 1^{+} et ln(1^{+} = 0^{+})$

D^{h-1} pour la borne $-\frac{1}{3}$

$\lim_{g\longrightarrow \frac{1^+}{3}} 3y+2 = 1^{+}$

$\lim_{g\longrightarrow \frac{1^+}{3}} ln(3y+2) = 0^{+}$

$\lim_{g\longrightarrow \frac{1^+}{3}} \frac{5}{ln(3y+2)} = +\infty$

D^{h-1} pour la borne $+\infty$

$\lim_{g\longrightarrow +\infty} \frac{5}{ln(3y+2)} = 0$

–

–

Domaine de la fonction réciproque

$D_{h-1} =]0;+\infty[$

Note : les deux bornes de f étant ouverte les deux bornes de f_{-1} sont ouvertes

Nous avons la fonction : $h(y) = \frac{5}{ln(3y+2)}$

On cherche maintenant la fonction réciproque : $y = f(x)$ avec $x = \frac{5}{ln(3y+2)}$

- $x * ln(3y+2) = 5$
- $ln(3y+2) = \frac{5}{x}$
- Éliminer le ln par l'exponentielle : $3y+2 = e^{\frac{5}{x}}$
- $y = \frac{e^{\frac{5}{x}-2}}{3}$

La fonction réciproque de $h(x)$ est $h^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{5}{x}-2}}{3}$

<u>Vérification</u> :

$h(1) = \frac{5}{3*1+2} = \frac{5}{ln(5)} = \frac{5}{1,60943}$ donc $= 3,10668$

$h^{-1}(3,10668) = \frac{e^{\frac{5}{3,10668}-2}}{3} = \frac{e^{1,60943}-2}{3}$ donc $= 0,99998$

3 Exercice N° 03 :

Enoncé :

Un nouveau bien **B** est proposé sur le marché. Le prix de ce bien est exprimé par les fonctions d'**o**ffre et de **d**emande, en fonction de la **q**uantité produite :

- $P_o(q) = \frac{q^2}{18} + 2$
- $P_d(q) = \begin{cases} 10 - \frac{5q}{3} \rightarrow si\ 0 \leq q \leq 3 \\ 6 - \frac{q}{3} \rightarrow si\ 3 \leq q \end{cases}$

-

Questions :

- **Q1.** Compléter le tableau de valeurs, puis faire la représentation graphique avec soin et déterminer le point d équilibre.
- **Q2.** Matérialiser le graphique le surplus du consommateur Sc et le surplus du producteur Sp.
- **Q3.** Calculer Sc et Sp.

Correction :

Réponse 1 :

Le tableau de valeur des fonctions $P_o(q) et P_d(q)$ remplis avec la calculatrice.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_o(q)$	2	2,056	2,22	2,5	2,88	3,39	4	4,72	5,56
$P_d(q)$	10	8,23	6,47	5	4,67	4,33	4	3,67	3,33

La quantité d'équilibre est 6
Le prix d'équilibre est 4

Réponse 2 :

Le surplus du consommateur est représente par la somme des surfaces du triangle $\widehat{AMD}$ du carré $\widehat{MKND}$ et du triangle $\widehat{DNG}$.

- $S_{c1} = \frac{(6-5)*(3-0)}{2}$
- $S_{c2} = (5-4)*(3-0)$
- $S_{c3} = \frac{(6-3)*(5-4)}{2}$
- $S_c = 6$ cf. figure 1

Le surplus du producteur est représenté par la surface du carré $\widehat{KOJG}$ a laquelle on soustrait l'intégrale à la courbe Po(q) sur l'intervalle 0 à 6. Po étant une courbe, on ne peut pas appliquer des règles de la géométrique. On fait alors appel aux intégrales.

- $S_p = (4*6) - \int_0^6 (\frac{q^2}{18} + 2)dq$
- $S_p = 24 - \left[(\frac{q^3}{18} + 2q) \right]_0^6$
- $S_p = 24 - \left[(\frac{6^3}{18} + 2*6) \right]$
- $S_p = 8$ cf. figure 2

Surplus consommateur $S_c = 6$ et surplus producteur $S_p = 8$

Utilisation de l'application GeoGebra

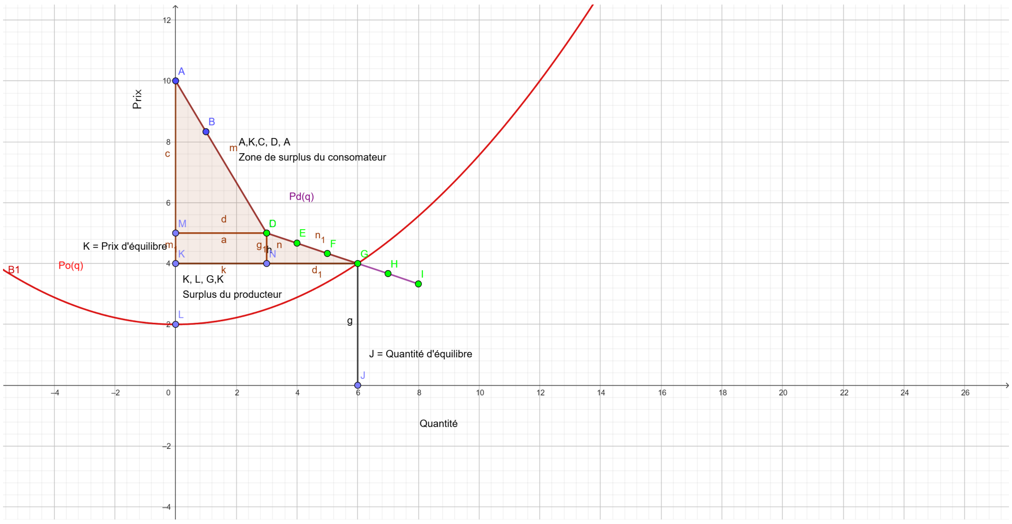

FIGURE 1 – Surplus du consommateur

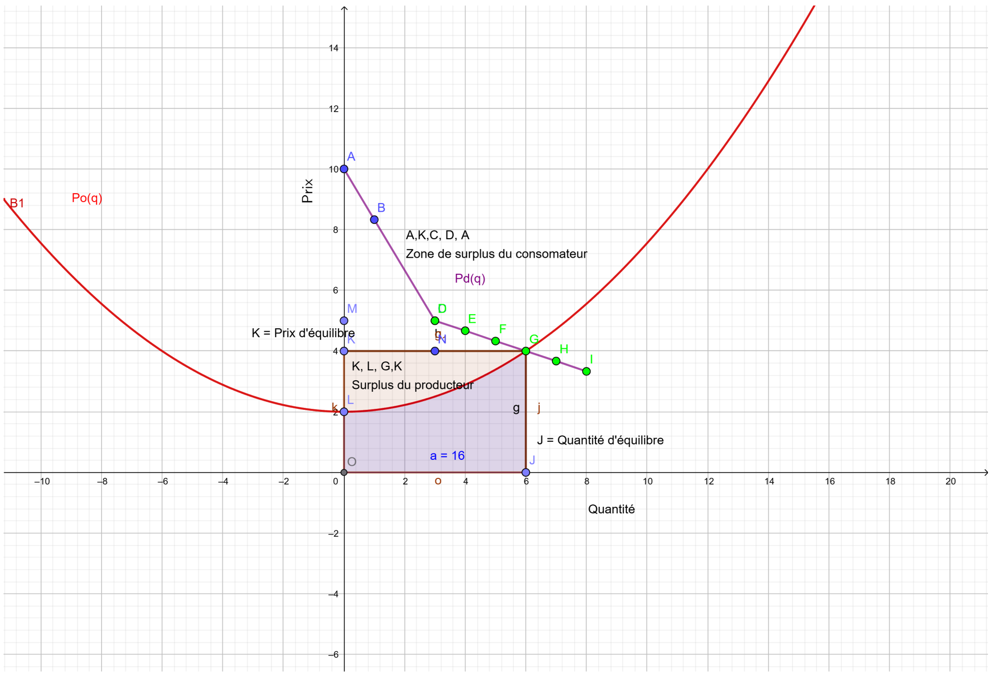

FIGURE 2 – Surplus du producteur