

π

Licence 1 DEG-Économie | Université de Poitiers | 2023

1 Exercice N° 01 :

Enoncé :

A l'aide d'une intégration par partie, calculer



$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} 12x^2 \ln(2x) dx$$

Correction :

→ Rappel de la formule de l'intégration par partie : $\int [u'v] = [uv] - \int u v'$

Il faut choisir le u' à primitiver et le v à dériver. Pour cela on retiens un v qui se dérive facilement.

- $v = \ln(2x)$ et $v' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$
- $u' = 12x^2$ et $u = 12 * \frac{x^3}{3} = 4x^3$

Nous avons donc : $I = [4x^3 * \ln(2x)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} (4x^3 * \frac{1}{x}) dx \mapsto [\text{Élément 1} - \text{élément 2}]$.

Remplaçons les deux éléments par leurs bornes inférieures et les supérieures :

- $\mapsto \text{Élément 1} : 4 * (\frac{e^3}{2})^3 \ln(2 * \frac{e^3}{2}) - [4 * (\frac{1}{2})^3 * \ln(2 * \frac{1}{2})] = [4 * \frac{e^9}{8} * \ln(e^3)] - [4 * \frac{1}{8} * \ln(1)]$
- $\mapsto \text{Élément 2 primitivé} : (4x^3 * \frac{1}{x}) dx = \frac{4x^3}{x} = 4x^2 - [4 * \frac{x^3}{3}]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} = [4 * \frac{(\frac{e^3}{2})^3}{3} - 4 * \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}]$

Ce qui donne : $I = [4 * \frac{e^9}{8} * \ln(e^3)] - [4 * \frac{1}{8} * \ln(1)] - [4 * \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}]$

- $= \frac{12}{8} * e^9 - 0 - \frac{4}{3} * (\frac{e^3}{2})^3 + \frac{4}{3} * \frac{1}{8}$
- $= \frac{3}{2} * e^9 - \frac{4}{3} * \frac{e^9}{8} + \frac{1}{6}$



$$I = e^9 * (\frac{4}{3}) + \frac{1}{6}$$

2 Exercice N° 02 :

Enoncé :

Déterminer la fonction réciproque $h(x)$, en précisant les ensembles de départ et d'arrivée,



$h(x)$ définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{3}; +\infty[$, par $h(y) = \frac{5}{\ln(3y+2)}$

Correction :

→ Rappel de la fonction réciproque : $f(a) = b$ sur $D^f \Leftrightarrow g(b) = a$ sur D^g ou $f^{-1}(b) = a$

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction réciproque il suffit de calculer les images des bornes du domaine de h . Mais attention les bornes sont ici exclues. On va donc calculer les limites.

Soit la fonction $h(y) = \frac{5}{\ln(3y+2)}$ définie sur le domaine $[-\frac{1}{3}; +\infty[$ et $-\frac{1}{3} \approx 3 * (-0,3332) + 2 = 1^+ \text{ et } \ln(1^+ = 0^+)$

$$\begin{aligned} D^{h^{-1}} \text{ pour la borne } -\frac{1}{3} \\ \lim_{g \rightarrow \frac{1}{3}^+} 3y + 2 = 1^+ \\ \lim_{g \rightarrow \frac{1}{3}^+} \ln(3y + 2) = 0^+ \\ \lim_{g \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{5}{\ln(3y + 2)} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{h^{-1}} \text{ pour la borne } +\infty \\ \lim_{g \rightarrow +\infty} \frac{5}{\ln(3y + 2)} = 0 \\ - \\ - \end{aligned}$$



Domaine de la fonction réciproque

$$D_{h^{-1}} =]0; +\infty[$$

Note : les deux bornes de f étant ouverte les deux bornes de f^{-1} sont ouvertes

Nous avons la fonction : $h(y) = \frac{5}{\ln(3y+2)}$

On cherche maintenant la fonction réciproque : $y = f(x)$ avec $x = \frac{5}{\ln(3y+2)}$

- $x * \ln(3y + 2) = 5$
- $\ln(3y + 2) = \frac{5}{x}$
- Éliminer le $\ln$ par l'exponentielle : $3y + 2 = e^{\frac{5}{x}}$
- $y = \frac{e^{\frac{5}{x}} - 2}{3}$



La fonction réciproque de $h(x)$ est $h^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{5}{x}} - 2}{3}$

Vérification :

$$h(1) = \frac{5}{3*1+2} = \frac{5}{\ln(5)} = \frac{5}{1,60943} \text{ donc } = 3,10668$$

$$h^{-1}(3,10668) = \frac{e^{\frac{5}{3,10668}} - 2}{3} = \frac{e^{1,60943} - 2}{3} \text{ donc } = 0,99998$$

3 Exercice N° 03 :

Enoncé :

Un nouveau bien **B** est proposé sur le marché. Le prix de ce bien est exprimé par les fonctions d'offre et de demande, en fonction de la quantité produite :

$$\begin{aligned} & \bullet P_o(q) = \frac{q^2}{18} + 2 \\ & \bullet P_d(q) = \begin{cases} 10 - \frac{5q}{3} \rightarrow \text{si } 0 \leq q \leq 3 \\ 6 - \frac{q}{3} \rightarrow \text{si } 3 \leq q \end{cases} \end{aligned}$$

Questions :

- **Q1.** Compléter le tableau de valeurs, puis faire la représentation graphique avec soin et déterminer le point d'équilibre.
- **Q2.** Matérialiser le graphique le surplus du consommateur S_c et le surplus du producteur S_p .
- **Q3.** Calculer S_c et S_p .

Correction :

Réponse 1 :

Le tableau de valeur des fonctions $P_o(q)$ et $P_d(q)$ remplis avec la calculatrice.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_o(q)$	2	2,056	2,22	2,5	2,88	3,39	4	4,72	5,56
$P_d(q)$	10	8,23	6,47	5	4,67	4,33	4	3,67	3,33



La quantité d'équilibre est 6
Le prix d'équilibre est 4

Réponse 2 :

Le surplus du consommateur est représenté par la somme des surfaces du triangle $\widehat{AMD}$ du carré $\widehat{MKND}$ et du triangle $\widehat{DNG}$.

- $S_{c1} = \frac{(6-5) \cdot (3-0)}{2}$
- $S_{c2} = (5-4) \cdot (3-0)$
- $S_{c3} = \frac{(6-3) \cdot (5-4)}{2}$
- $S_c = 6$ cf. figure 1

Le surplus du producteur est représenté par la surface du carré $\widehat{KOJG}$ à laquelle on soustrait l'intégrale à la courbe $P_o(q)$ sur l'intervalle 0 à 6. P_o étant une courbe, on ne peut pas appliquer des règles de la géométrie. On fait alors appel aux intégrales.

- $S_p = (4 \cdot 6) - \int_0^6 \left(\frac{q^2}{18} + 2 \right) dq$
- $S_p = 24 - \left[\left(\frac{q^3}{18} + 2q \right) \right]_0^6$
- $S_p = 24 - \left[\left(\frac{6^3}{18} + 2 \cdot 6 \right) \right]$
- $S_p = 8$ cf. figure 2



Surplus consommateur $S_c = 6$ et surplus producteur $S_p = 8$

Utilisation de l'application GeoGebra

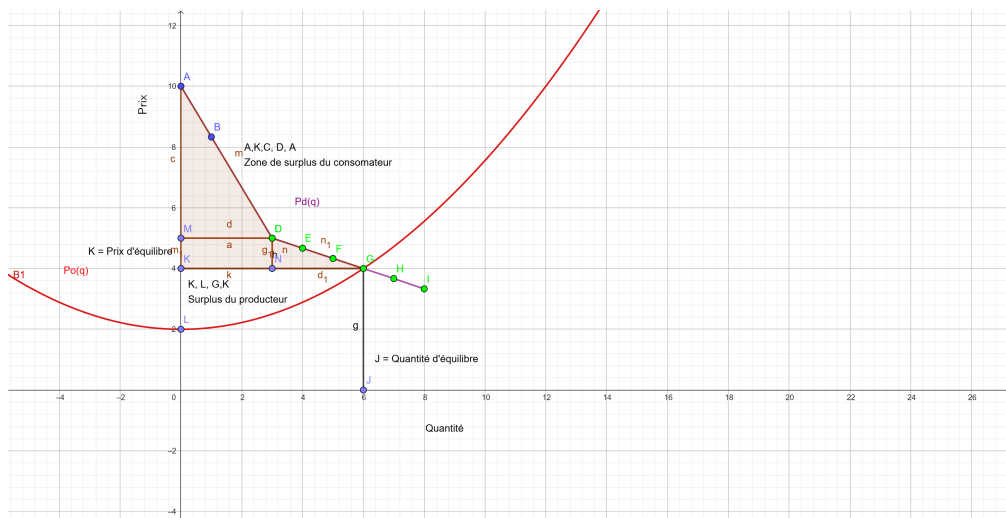


FIGURE 1 – Surplus du consommateur

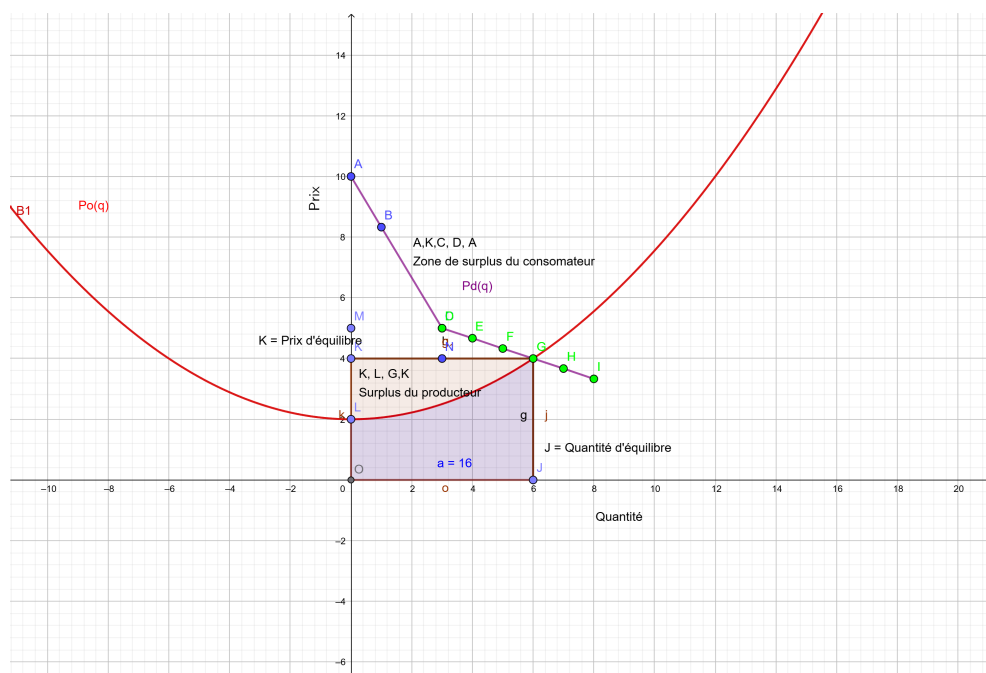


FIGURE 2 – Surplus du producteur