Mathématiques

Logique et algèbre

Cours - Nombres complexes

Version 1.1.0

Jérôme Cardan [1501-1576], est est un mathématicien, philosophe, astrologue, inventeur et médecin italien. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes.

Table des matières

Première partie

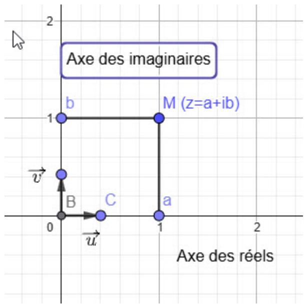
Cours sur les complexes

Un peu d'histoire

$$Z = a + ib$$

L'une des représentations

$$\begin{cases} a = \mathscr{R}e(Z) : partie\ réel \\ b = \mathscr{I}m(Z) : partie\ imaginaire \\ i\ est\ tel\ que\ i^2 = 1 \end{cases}$$



En mathématiques, l'ensemble des nombres complexes est actuellement défini comme une extension de l'ensemble des nombres réels, contenant en particulier un nombre imaginaire.

Un **nombre complexe** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a+bi$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire tel que $1^2 = 1$.

Les nombres complexes ont été inventés à partir du XVIème siècle pour représenter les solutions d'équations qui ne possédaient pas de solutions dans $\mathscr{R}$.

Par la suite, ces nombres furent de plus en plus utilisés par les mathématiciens et les physiciens, qui leur trouvèrent beaucoup d'avantages, jusqu'à devenir incontournables dans les sciences modernes.

Le nombre a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe et le nombre b la **partie imaginaire**.

$\longmapsto$ *Nombre Complexes Histoire* 1

• Aucun nombre multiplier par lui même donne -1 ⇔ $\sqrt{-1} = ?$.

• La somme de deux nombres complexes est égale à la somme géométrique des deux vecteurs qui les représentent.

• Le produit de deux nombres complexes

• Le module de deux nombres complexes

• L'argument de deux nombres complexes

$\longmapsto$ *Nombre Complexes Histoire* 2

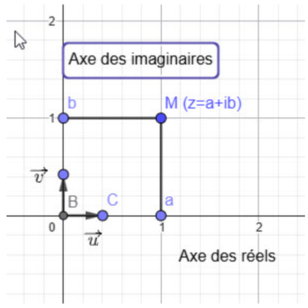
Chapitre 1

Représentation des nombres complexes

1.1 Écriture et représentation graphique d'un nombre complexe

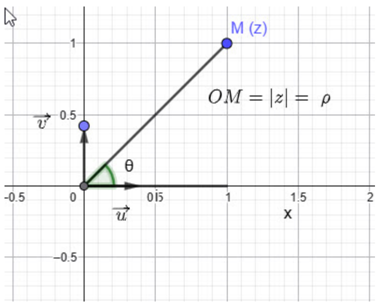
1.1.1 Forme algébrique

$$Z = a + ib \qquad \begin{cases} a = \mathscr{R}e(Z) : partie\ réel \\ b = \mathscr{I}m(Z) : partie\ imaginaire \\ i\ est\ tel\ que\ i^2 = 1 \end{cases}$$



1.1.2 Forme trigonométrique

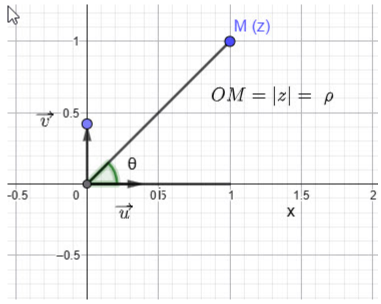
$$Z = [\rho;\theta] = \rho(cos\theta + isin\theta) \qquad \begin{cases} \rho = |Z| : module\ de\ Z \\ \theta = arg(Z) : un\ argument\ de\ Z \end{cases}$$



1.1.3 Forme exponentielle

$$Z = \rho e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \rho = |Z| : module\, de\, Z \\ \theta = arg(Z) : un\, argument\, de\, Z \\ e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \end{cases}$$



1.2 Le conjugué d'un nombre complexe

1.2.1 Forme algébrique

Le conjugué de $Z = a + ib$ est $\bar{Z} = a - ib$

On a :

- $Z + \bar{Z} = 2a = 2\mathscr{R}e(Z)$
- $Z - \bar{Z} = 2ib = 2\mathscr{I}m(Z)$
- $Z * \bar{Z} = a^2 + b^2 = |Z|^2$

1.2.2 Forme trigonométrique

Le conjugué de $Z = [\rho, \theta]$ est $\bar{Z} = [\rho, -\theta]$

On a :

- $Z * \bar{Z} = \rho^2 = |Z|^2$

1.2.3 Forme exponentielle

Le conjugué de $Z = \rho e^{i\theta}$ est $\bar{Z} = \rho e^{-i\theta}$

On a :

- $Z * \bar{Z} = \rho^2 = |Z|^2$

Chapitre 2

Calculs avec les nombres complexes

2.1 Addition et soustraction des nombres complexes

2.1.1 Forme algébrique

Pour **additionner** ou **soustraire** deux nombres complexes, on additionne ou soustrait séparément leurs parties réelles et imaginaires.
Exemple : $(2+3i)+(4+5i)=6+8i$.

2.1.2 Forme trigonométrique

On ne sait pas faire

2.1.3 Forme exponentielle

On ne sait pas faire

2.2 Multiplication des nombres complexes

2.2.1 Forme algébrique

Pour calculer le **produit** de deux nombres complexes, on utilise la double distributivité et la propriété $1^2=1$.

Exemple :
$(2+3i)+(4+5i)$
$=8+10i+12i+15i^2$
$=-7+22i$.

2.2.2 Forme trigonométrique

$[\rho;\theta]*[\rho';\theta']=[\rho\rho'+\theta\theta']$

Exemple :
$\left[2;\frac{\pi}{3}\right]*\left[3;\frac{\pi}{4}\right]=\left[2*3;\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right]=\left[6;\frac{7\pi}{12}\right]$

2.2.3 Forme exponentielle.

$\rho^{i\theta} * \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

Exemple :

$4e^{i\pi} * 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2.3 La division des nombres complexes

2.3.1 Forme algébrique

Pour calculer le **quotient** de deux nombres complexes, on multiplie d'abord les deux nombres par le conjugué du deuxième puis on simplifie le résultat.

Le **conjugué** d'un nombre complexe $a + bi$ est $a - bi$

Exemple :

$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}$

$= \frac{8-10i+12i-15i^2}{4^2-(5i)^2}$

$= \frac{23+2i}{16+25} \Rightarrow \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$

2.3.2 Forme trigonométrique

$\frac{[\rho;\theta]}{[\rho';\theta']} = \left[\frac{\rho'}{\rho};\theta-\theta'\right]$

Exemple :

$\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[3;\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{3};\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{2}{3};\frac{\pi}{12}\right]$

2.3.3 Forme exponentielle

$\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho} e^{i(\theta-\theta')}$

Exemple :

$\frac{4e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Chapitre 3

Manipulations avec les nombres complexes

3.1 Passage d'un type à un autre

3.1.1 Forme trigonométrique ou exponentielle vers forme algébrique

On dispose de ρ et θ et on cherche $a = \mathscr{R}e(Z)$ et $b = \mathscr{I}m(Z)$

• On calcul $a = \rho cos\theta$ et $b = \rho sin\theta$

• On conclut en écrivant $Z = a + ib$

3.1.2 Forme algébrique vers forme trigonométrique ou exponentielle

On dispose de a et b et on cherche ρ et θ

• On calcule le **module** $|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés :

Quelques propriétés du module : $|Z * Z'| = |Z| * |Z'|$ $|\frac{Z}{Z'}| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ si $Z' \neq 0$

• on cherche l'**argument** (un angle) θ qui vérifie : $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$

Propriétés :

Quelques propriétés de l'argument : $arg(z * z') = arg(z) + arg(z')$ $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$ si $Z' \neq 0$

• On conclut en écrivant :

- Pour la forme **trigonométrique** : $Z = [\rho; \theta] = \rho(cos\theta + isin\theta)$

- Pour la forme **exponentielle** : $Z = \rho e^{i\theta}$

3.2 Factorisation par l'angle moitié

3.2.1 Cosinus

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}} * \left\{ e^{\frac{i(a-b)}{2}} + e^{\frac{i(b-a)}{2}} \right\}$
- $e^{ia} + e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}} * 2cos\left\{\frac{a-b}{2}\right\}$ Formule d'Euler
- $e^{ia} + e^{ib} = 2cos\theta$

3.2.2 Sinus

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}} * \left\{ e^{\frac{i(a-b)}{2}} - e^{\frac{i(b-a)}{2}} \right\}$
- $e^{ia} + e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}} * 2sin\left\{\frac{a-b}{2}\right\}$ Formule d'Euler
- $e^{ia} + e^{ib} = 2sin\theta$

3.3 Les racines carrées d'un nombre complexe U d'équation $z^2 = U$

3.3.1 U est écrit sous la forme trigonométrique

- On écrit $U = [\rho;\alpha]$
- On cherche $z = [\rho;\theta]$ tel que $z^2 = U$: $[\rho;\theta]^2 = [\rho;\alpha] \Leftrightarrow [\rho^2;2\theta] = [\rho;\alpha]$

→ L'égalité des module permet de déterminer ρ

→ L'égalité des arguments permet de déterminer les arguments possible θ (ne pas oublier qu'un argument est défini à $2k\pi$ près) ρ

3.3.2 Si U est écrit sous la forme algébrique

Il est impossible de déterminer un argument de U

- On écrit $U = a + ib$
- On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = U : = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$
- On ajoute l'équation du module : $x^2 + y^2 = |U|$ ce qui permet de trouver rapidement x^2 et y^2
- On obtient 4 couples de solutions possibles et on en élimine 2 avec l'équation partie imaginaire $2xy = b$

3.3.3 Remarques

- Un nombre complexe non nul admet 2 racines carrées qui sont **opposées**.

• Le principe de recherche des racines sous forme trigonométrique peut être étendue à la recherche de racine $n^{iéme}$ (équation $z^n = U$) ; on montre alors qu'un nombre complexe non nul dans $\mathscr{C}$ n racines $n^{iéme}$ distinctes.

3.4 Équation du deuxième degré

$az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$

• On calcul $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ est maintenant un nombre complexe.

• On cherche une racine carré δ de Δ (voir méthode des racines carrées ci dessus)

• L'équation à deux solutions : $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$

Remarques :

Nous avons vu en première qu'une équation du deuxième degré admet toujours 0, 1 ou 2 solutions.

SI on considère, dans le cas où delta est négatif, qu'il est possible de calculer la racine de delta en utilisant les nombres complexes,

ALORS une équation du deuxième degré admet deux solutions lorsque delta est négatif.

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ et } Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2A}$$

3.4.1 $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$

• $2 + 2\sqrt{3}i = \left[4; \dfrac{\pi}{3}\right]$

• On cherche $\rho; \theta$ tel que $= \left[\rho^2; 2\theta\right] = \left[4; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

$\rightarrow$ Égalité des modules $\rho^2 = 4$ d'où $\rho = 2$

$\rightarrow$ Égalité des arguments $2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathscr{Z} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

• On a 2 solutions opposées $z_1 = \left[2, \dfrac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \left[2, \dfrac{7\pi}{6}\right] = -\sqrt{3} + i = -z_1$

3.4.2 $z^2 = 3 - 4i$

• On cherche $z = x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = 3 - 4i$

$(x + iy)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

• On ajoute l'équation du module $x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$$\text{D'où} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} . \\ z = \pm(2 - i) \\ . \end{cases}$$

3.5 Notes complémentaires

3.5.1 Distances et angles dans le plan complexe

Voyons maintenant deux formules qui permettent de calculer des distances et des angles dans le plan complexe.

Distances

SI A et B sont deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B ALORS : $\boxed{AB = |Z_b - Z_A|}$

Angle

SI de plus C et D sont deux points d'affixes respectives Z_C et Z_D, ALORS : $\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg(\frac{Z_D - Z_c}{Z_B - Z_A})}$