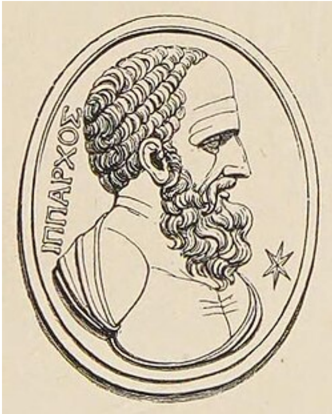


Mathématiques

Logique et algèbre

Cours - Trigonométrie

Version 1.1.0

Hipparque de Nicée est considéré comme le fondateur de la **trigonométrie**.
Hipparque est reconnu comme le plus grand observateur astronomique de l'Antiquité et, par certains, le plus grand astronome de l'Antiquité.
Il a développé la trigonométrie et construit des **tables trigonométriques**, et il a résolu plusieurs problèmes de trigonométrie sphérique.

→ *Hipparque de Nicée*

Table des matières

Première partie

Cours de trigonométrie

Un peu d'histoire

La **trigonométrie** est la partie des mathématiques qui fait le lien entre les **longueurs** des côtés d'un triangle rectangle et les mesures de ses **angles**.

Chapitre 1

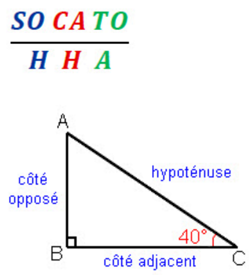
SO.CA.TO

1.1 Formule SOCATO

$$\sin = \frac{Opposé}{Hypoténuse}$$

$$\cos = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$

$$\tan = \frac{Opposé}{Adjascent}$$



1.2 Utilisation du cosinus

1. Écrire la formule et remplacer les valeurs connues par les données de l'énoncé.

2 SI on doit calculer une **longueur**

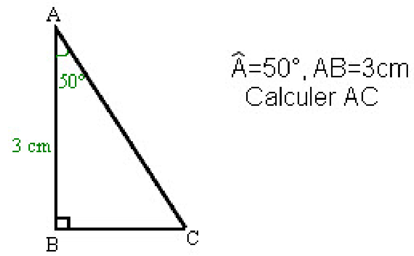
- Écrire le cosinus sous la forme d'une fraction sur 1.
- Réaliser un produit en croix.

$$\frac{\cos(\widehat{50})}{1} = \frac{3}{AC} \Rightarrow \cos(50) = 0,64 \Rightarrow AC \approx 4,7cm$$

3 SI on doit calculer **l'angle**

- Appliquer la fonction réciproque du cosinus au résultat obtenu.

$$\cos(40^0) = 0,77 \Leftrightarrow \cos^{-1} 0,77 = 40^0$$



Il est préférable de calculer $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ en une seule étape sur la calculatrice.

1.3 Relation de congruence

Proposition (propriété de la relation de congruence) :

Soit Soit $m > 0$. On dit que deux réels a et b sont congrus modulo m s'il existe un entier relatif $k \in \mathcal{Z}$ tel que : $a = b + km$.On note : $a \equiv b[m]$

ALORS

- réflexivité : $a \equiv a[m]$
- symétrie : $a \equiv b[m] \Leftrightarrow b \equiv a[m]$
- transitivité : SI $a \equiv b[m]$ et $b \equiv c[m]$ ALORS $a \equiv c[m]$
- additivité : SI $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$ ALORS $a + c \equiv b + d[m]$

En trigonométrie, la plupart du temps, on choisira $m = 2\pi$ ou $m = \pi$

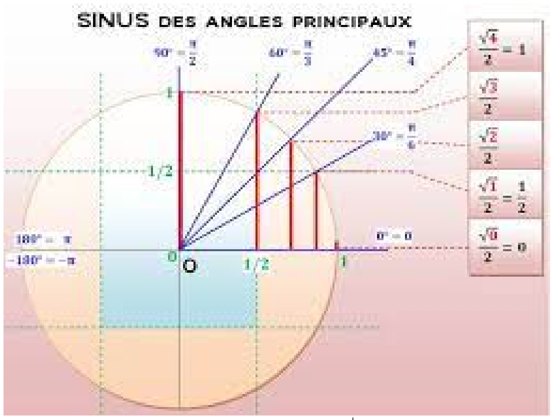
En arithmétique, m sera plutôt un entier.

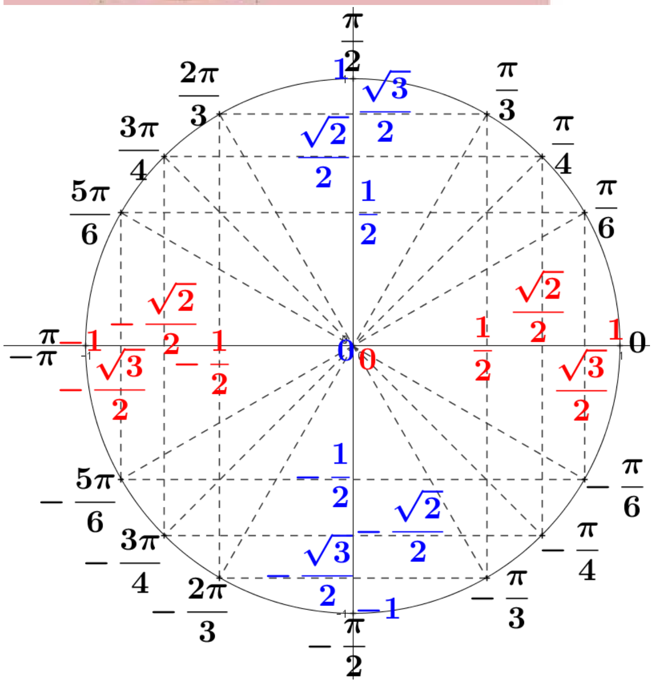
Chapitre 2

Le cercle trigonométrique

$Degré$	$Radians$	$X = \cos(\sigma)$	$Y = \sin(\sigma)$
0	0	1	0
30	$\pi \div 6$	$\sqrt{3} \div 2$	$1 \div 2$
45	$\pi \div 4$	$\sqrt{2} \div 2$	$\sqrt{2} \div 2$
60	$\pi \div 3$	$1 \div 2$	$\sqrt{3} \div 2$
90	$\pi \div 2$	0	1
120	$2\pi \div 3$	$-1 \div 2$	
135	$3\pi \div 4$	$-\sqrt{2} \div 2$	
150	$5\pi \div 6$	$-\sqrt{3} \div 2$	
180	π	-1	0
210	$7\pi 6$	$-\sqrt{3} \div 2$	
225	$5\pi \div 4$	$-\sqrt{2} \div 2$	
240	$4\pi \div 3$	$-1 \div 2$	
270	$3\pi \div 2$	0	-1
300	$5\pi \div 3$	$1 \div 2$	
315	$7\pi \div 4$	$\sqrt{2} \div 2$	
330	$11\pi \div 6$	$\sqrt{3} \div 2$	
380	2π	1	0

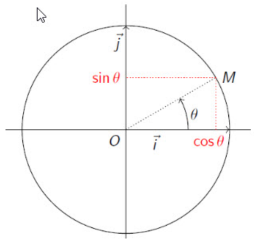
Ne pas oublier angle A-Angle B = 180°

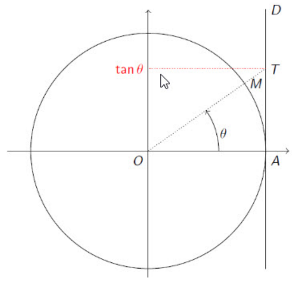




$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

$tan(\theta) = \dfrac{sin(\theta)}{cos()\theta}$.





On retrouve les cosinus et sinus d'autres nombres réels tels que $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$ grâce aux relations suivantes, qu'on peut également lire sur le cercle trigonométrique grâce aux propriétés de symétrie.

Chapitre 3

Formules de trigonométrie

Formules d'addition : Pour les valeurs de x et y où les expressions ont un sens :

- $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$ $\quad cos(x-y) = cos(x)cos(y) + sin(x)sin(y)$;
- $sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x)$ $\quad sin(x-y) = sin(x)cos(y) - sin(y)cos(x)$;
- $tan(x+y) = \dfrac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}$ $\quad tan(x-y) = \dfrac{tan(x)-tan(y)}{1+tan(x)tan(y)}$

Formules d'duplication : Pour les valeurs de x et y où les expressions ont un sens :

$*$• $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$;

- $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$; • $tan(2x) = \dfrac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$

Formules d'linéarisation : Pour les valeurs de x et y où les expressions ont un sens :

- $cos^2(x) = \dfrac{1+cos(2x)}{2}$; • $sin^2(x) = \dfrac{1-cos(2x)}{2}$;

Formules d'Transformation de produit en somme :

- $cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$
- $sin(a)sin(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a-b) - cos(a+b))$
- $sin(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a+b) + sin(a-b))$

Formules d'**Transformation de somme en produit (ou de factorisation)** :

- $cos(p)+cos(q)=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $cos(p)-cos(q)=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $sin(p)+sin(q)=2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $sin(p)-sin(q)=cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Formules d'**EULER** :

- $cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
- $cos(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Formules d'**MOIVRE** :

- $(cos(x)+i\ sin(x))^n=cos(nx)+i\ sin(nx)$
- $\left(e^{ix}\right)^n=\left(e^{i\,nx}\right)$

Chapitre 4

Résolution d'équation trigonométrique

Pour résoudre une équation trigonométrique, le plus souvent, on se ramène au résultat suivant :

> Théorème : SOIT x et y deux nombres réels ALORS :
> • $cos(U) = cos(V) \Leftrightarrow U \equiv V + [2k\pi]$ OU $U \equiv -V + [2k'\pi]$ avec $k, k' \in \mathcal{Z}$
> • $sin(U) = sin(V) \Leftrightarrow U \equiv V + [2k\pi]$ OU $U \equiv \pi - V + [2k'\pi]$ avec $k, k' \in \mathcal{Z}$
> • $tan(U) = tan(V) \Leftrightarrow U \equiv V + [k\pi]$

Pour se ramener à ce résultat, on peut utiliser les **valeurs usuelles** , des **formules de trigonométrie**, **faire un changement de variables pour résoudre une autre équation**

Chapitre 5

Annexes

5.1 Fonctions trigonométriques

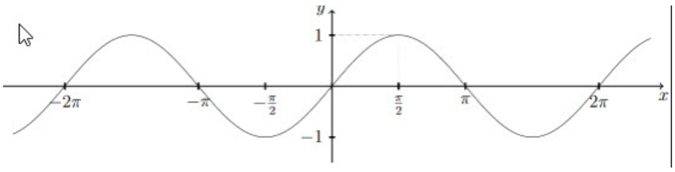
La fonction sinus :

La fonction : $sin : \mathscr{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est continue et dérivable sur $\mathscr{R}$

Sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathscr{R}$ $(sin)'(x) = cos(x)$

La fonction sin est **impaire** et 2π sa périodique.

Elle vérifie de plus, pour tout $x \in \mathscr{R}$, $\|sinx\| \leqslant \|x\|$



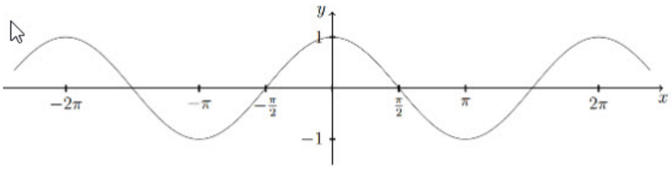
La fonction cosinus :

La fonction : $cos : \mathscr{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est continue et dérivable sur $\mathscr{R}$

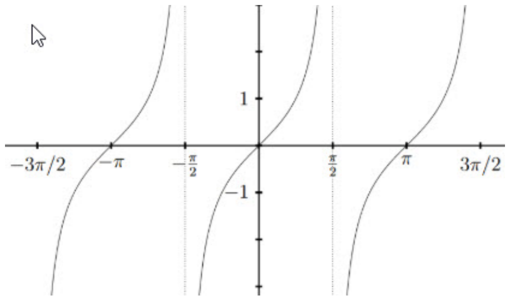
Sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathscr{R}$ $(cos)'(x) = -sin(x)$

La fonction sin est **paire** et 2π sa périodique.

Elle vérifie de plus, pour tout $x \in \mathscr{R}$, $\|sinx\| \leqslant \|x\|$

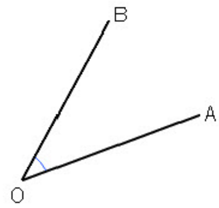


La fonction tangente :
La fonction : $tan : \mathscr{R}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in \mathscr{Z}\right\} \longrightarrow \mathscr{R}$ est continue et dérivable sur $\mathscr{R}$
Sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathscr{R}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in \mathscr{Z}\right\}$ $(tan)'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$
La fonction sin est **impaire** et 2π sa périodique.
Elle vérifie de plus $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan(x) = -\infty$



5.2 Les angles orientés

- Un **angle orienté** est un angle formé par un **point d'origine** et **deux vecteurs** partant de ce point, mesuré en **radians**
- Il tourne dans le **sens inverse des aiguilles d'une montre** (sens trigonométrique)

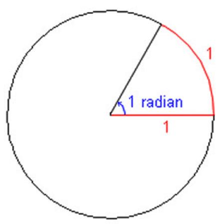


Angle géométrique	$\hat{O}$	$= \widehat{AOB}$	$= \widehat{BOA}$
Angles orienté	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > 0)$	$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} < 0)$	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} < 0))$

5.3 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

5.4 Définition

- Le **radian** est une unité de mesure d'angle.
Prenons un cercle de rayon 1 et plaçons sur son contour un bout de ficelle de longueur 1.
- Un radian est la mesure de l'angle formé par le centre du cercle et les 2 extrémités de la ficelle.



Exemple :
- Un angle qui mesure X radians est obtenu avec un morceau de ficelle de longueur X.
- Donc, si nous réalisons un tour complet du cercle (360 degrés), la formule du périmètre du cercle donne :
$P = 2 * \pi * 14$ donc $P = 2\pi$ donc $360^o = 2\pi$ radians.

5.5 Mesure du principal

La mesure principale d'un angle orienté est . $\pi < x \leqslant \pi$.
Ajouter ou en enlever autant de fois 2π que nécessaire.
Une méthode pour calculer la mesure principale :

$-\pi < \frac{85}{3} + k * 2\pi \leqslant +\pi$	Écrire la double inéquation correspondant au problème
$-\pi - \frac{85}{3} < 2 * k * \pi \leqslant +\pi - \frac{85}{3}$	Chercher à isoler k pour savoir combien de tour à enlever ou à ajouter
$\frac{-3\pi - 85\pi}{3} < 2 * k * \pi \leqslant \frac{3\pi - 85\pi}{3}$	Simplifier après avoir ôter $\frac{85\pi}{3}$ aux termes de l'inéquations. Dénominateur commun = 3
$\frac{-3-85}{6} < k \leqslant \frac{3-85}{6}$	Diviser les termes de l'inéquation par 2π. Multiplier D par 2π
$-14,6 < k \leqslant -13,6 \Rightarrow K = 14$	K est un entier
$\frac{85\pi}{3} - 14 * 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{3}$	La mesure principale est $\frac{\pi}{3}$.Réduire au dénominateur commun = 3