Mathématiques

Logique et algèbre

Exercices : Nombres-complexes

Version 1.1.0

Jérôme Cardan [1501-1576], est est un mathématicien, philosophe, astrologue, inventeur et médecin italien. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes.

Table des matières

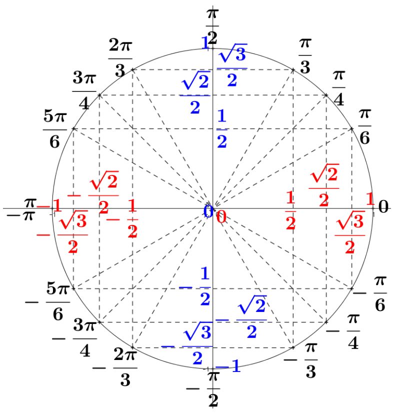
Première partie

Exercices sur les complexes

Chapitre 1

Méthodologie et exemples

1.1. CALCULER LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

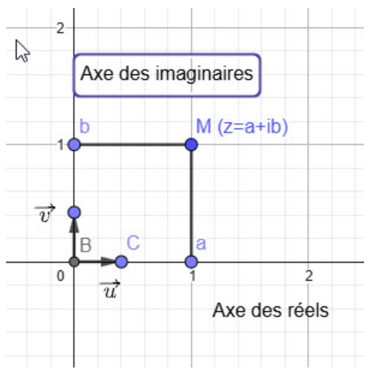


1.1.1 Méthode

Savoir identifier la partie réel de la **partie imaginaire** d'un nombre complexe et appliquer les formules suivantes

•Le **module** de Z , ce note $|Z| \Rightarrow$ $\boxed{|Z| = \sqrt{a^2+b^2}}$ - ou - $a = \mathscr{R}e(Z)$ et $b = \mathscr{I}m(Z)$

•Le **module** de Z , ce note $|Z| \Rightarrow$ $\boxed{|Z| = \sqrt{Z * \bar{Z}}}$ - ou - $\bar{Z}$ est le **conjugué** de Z. SI $Z = 1 - i$ SI $\bar{z} = 1 + i$



1.1.2 Exemples

$Z = 3+4i$

$Z = 3+4i \Rightarrow |Z| = |3+4i| \Rightarrow |Z| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{25} \Rightarrow |Z| = 5$

$Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

$Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \Rightarrow |Z| = \dfrac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1+i|} \Rightarrow |Z| = \dfrac{\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \Rightarrow |Z| = \dfrac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow |Z| = \sqrt{2}$

$Z = \dfrac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$

$Z = \dfrac{1+itan\theta}{1-itan\theta} \Rightarrow |Z| = \dfrac{|1+itan\theta|}{|1-itan\theta|} \Rightarrow |Z| = \dfrac{\sqrt{(1)^2+(tan\theta)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-tan\theta)^2}} \Rightarrow |Z| = \dfrac{\sqrt{1^2+tan^2\theta)}}{\sqrt{1^2+tan^2\theta}} \Rightarrow |Z| = 1$

$Z = 1+cos\theta+isin\theta$

$Z = 1+cos\theta+isin\theta \Rightarrow |Z| = |1+cos\theta+isin\theta| \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1+cos\theta)^2+(sin\theta)^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{1+2cos\theta+cos^2\theta+(sin^2\theta)}$
$\Rightarrow |Z| = \sqrt{1+2cos\theta+cos^2\theta+(sin^2\theta)}$ car $cos^2\theta+sin^2\theta = 1 \Rightarrow |Z| = \sqrt{2+2cos\theta}$

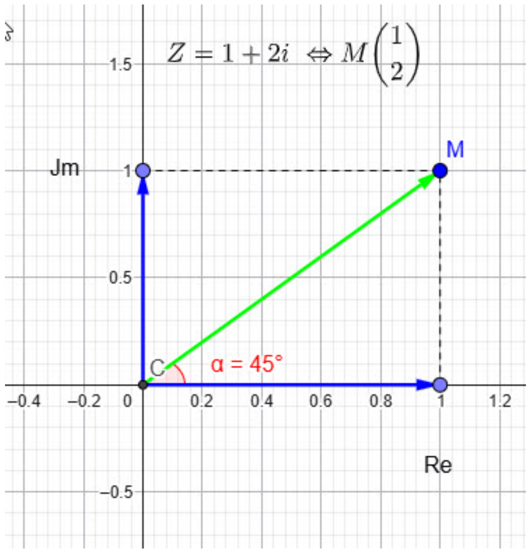
$\mapsto$ *Nombre Complexes Module*

1.2. CALCULER L'ARGUMENT DES NOMBRES COMPLEXES

1.2.1 Méthode

Savoir identifier la **partie imaginaire** $\mathscr{I}m(Z)$ de la **partie réel** $\mathscr{R}e(Z)$ d'un nombre complexe. et d'appliquer les formules suivantes

$a = \mathscr{R}e(Z)$ et $b = \mathscr{I}m(Z)$



1.2.2 Exemples

$z = 2 + 2i\sqrt{3}$

$z = 2 + 2i\sqrt{3}$

• **Étape 1 : Rechercher le module** de $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

$z = 2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = |2 + 2i\sqrt{3}| \Rightarrow |Z| = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{4 + 4 * 3} \Rightarrow |Z| = 4$

• **Étape 2 : Rechercher le l'argument** de $z = 2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow / Arg(Z) = \theta + 2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ est $\dfrac{\pi}{3}$

• **Étape 3 : Solution**

$z = 2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow$ Module $|Z| = 4$ et argument $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-1}$

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-1}$ **Posons** $\alpha=1+i$ et $\beta=\sqrt{3}-i \Rightarrow Z=\dfrac{\alpha}{\beta}$

• Étape 1 : Rechercher le module et l'argument de α

$|\alpha|=|1+i| \Rightarrow \sqrt{1^2+1^2} \Rightarrow |\alpha|=\sqrt{2}$

Soit / $Arg(\alpha)=\theta_1+2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta=\dfrac{\mathscr{Re}(Z)}{|Z|} \\ sin\theta=\dfrac{\mathscr{Im}(Z)}{|Z|}\end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta=\dfrac{2\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ_1 est $\dfrac{\pi}{4}$

$\alpha=1+i \Rightarrow$ Module $|Z|=\sqrt{2}$ et argument $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

• Étape 2 : Rechercher le module et l'argument de β

$|\beta| \Rightarrow \left|\sqrt{3}-i\right| \Rightarrow \sqrt{(3)^2+(-1)^2} \Rightarrow |\beta|=\sqrt{4}=2$

Soit / $Arg(\beta)=\theta_2+2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta=\dfrac{\mathscr{Re}(Z)}{|Z|} \\ sin\theta=\dfrac{\mathscr{Im}(Z)}{|Z|}\end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ_2 est $\dfrac{11\pi}{6}$

$\beta=1+i \Rightarrow$ Module $|Z|=2$ et argument $\theta_1=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$

• Étape 3 : Solution

<u>**Rappel :**</u> Propriété d'argument

$z=\dfrac{\alpha}{\beta}$ $Arg(Z)=Arg(\dfrac{\alpha}{\beta})+2k\pi \Rightarrow Arg(Z)=Arg(\alpha)-Arg(\beta)+2k\pi$

Donc : $Arg(Z)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$ $Arg(Z)=\dfrac{6\pi-44\pi}{24}-\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$

$Arg(Z)=-\dfrac{19\pi}{12}-\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$

$(1-i\sqrt{3})(1-i)$

$Z=(1-i\sqrt{3})(1-i)$ Posons $\alpha=(1-i\sqrt{3})$ et $\beta=(1-i) \Rightarrow Z=\alpha*\beta$

• Étape 1 : Rechercher le module et l'argument de α

$|\alpha|=\left|1-i\sqrt{3}\right| \Rightarrow \sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2} \Rightarrow |\alpha|=2$

Soit / $Arg(\alpha)=\theta_1+2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta=\dfrac{\mathscr{Re}(Z)}{|Z|} \\ sin\theta=\dfrac{\mathscr{Im}(Z)}{|Z|}\end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta=\dfrac{1}{2} \\ sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ_1 est $\dfrac{5\pi}{3}$

$\alpha = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow$ Module $|Z| = 2$ et argument $\theta_1 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$

• **Étape 2 : Rechercher le module et l'argument de β**

$|\beta| = |1 - i| \Rightarrow \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \Rightarrow |\beta| = \sqrt{2}$

Soit / $Arg(\beta) = \theta_2 + 2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable θ_2 est $\dfrac{7\pi}{4}$

$\alpha = 1 - i \Rightarrow$ Module $|Z| = \sqrt{2}$ et argument $\theta_1 = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

• **Étape 3 : Solution**

Rappel : Propriété d'argument $z = \alpha * \beta$ $Arg(Z) = Arg(\alpha.\beta) + 2k\pi \Rightarrow Arg(Z) = Arg(\alpha) + Arg(\beta) + 2k\pi$

$Arg(Z) = \dfrac{5\pi}{3} + \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$ $Arg(Z) = \dfrac{20}{12} + \dfrac{21}{12} + 2k\pi$

$Arg(Z) = \dfrac{41\pi}{12} + 2k\pi$

$z = \dfrac{1}{5 + 5i}$

$z = \dfrac{1}{5 + 5i}$ Posons $\alpha = 5(1 + i) \Rightarrow Z = \dfrac{1}{\alpha}$

• **Étape 1 : Rechercher le module de α**

$|\alpha| = 5|1 + i| \Rightarrow 5\sqrt{1^2 + 1^2}$

$|\alpha| = 5\sqrt{2}$

• **Étape 2 : Rechercher le l'argument de α**

Soit / $Arg(\alpha) = \theta_1 + 2k\pi$

$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases}$ $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\theta = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ Selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ_1 est $\dfrac{\pi}{4}$

$Arg(Z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

• **Étape 3 : Solution**

Rappel : Propriété d'argument

$z = \dfrac{1}{\alpha}$ $Arg(Z) = Arg(\dfrac{1}{\alpha}) + 2k\pi \Rightarrow Arg(Z) = -Arg(\alpha) + 2k\pi$

$Arg(Z) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

⟼ *Nombre Complexes Argument*

$z = -8\sqrt{3} + 8i$

$z = -8\sqrt{3} + 8i$

• Étape 1 : **Déterminer la forme trigonométrique** Z

◦ Rechercher le **module**

$|Z| = \left|-8\sqrt{3} + 8i\right| \Rightarrow |Z| = \sqrt{(-8\sqrt{3})^2 + (8)^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{256} = 16$

Le module de $|Z| = 16$

◦ Rechercher l'**argument**

Soit / $Arg(Z) = \theta_1 + 2k\pi$

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases} \quad \begin{cases} cos\theta = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'argument, selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ_1 est $\dfrac{5\pi}{6}$

◦ Établir **la forme complexe**

La forme trigonométrique de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est $Z = 16(cos\dfrac{5\pi}{6} + isin\dfrac{5\pi}{6})$

• Étape 2 : **Déterminer les racine carrées de** Z

Cela se traduit par, il existe élevé au carré z_2 qui donne Z.

$\Rightarrow z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$ avec $z = x + iy \Rightarrow (x+iy)^2 = (-8\sqrt{3} + 8i) \Rightarrow (x^2 - y^2 + 2ixy) = (-8\sqrt{3} + 8i)$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} \\ 2xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 16 \quad [module] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} \\ xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 16 \quad [module] \end{cases}$$

On réalise la somme de l'équation 1 et de l'équation 3 pour trouver les valeurs de x

$\Rightarrow 2x^2 = -8\sqrt{3} + 16 \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3} + 8$ Remarque $8 = 6 + 2$

$\Rightarrow x^2 = 6 - 4\sqrt{3} + 2 \Rightarrow x^2 = \sqrt{6}^2 - (2 * \sqrt{6} * \sqrt{2}) + \sqrt{2}^2$

$\Rightarrow x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2) \Rightarrow x = \pm\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$

Les racines carrées de Z sont $x_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et $x_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}$

On prend l'équation 3 pour trouver les valeurs de y

-**Pour** $x_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$\Rightarrow xy = 4 \Rightarrow x = (\sqrt{6} - \sqrt{2})y = 4$

$\Rightarrow (\sqrt{6} - \sqrt{2}) * y = \dfrac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$\Rightarrow y = \dfrac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$ On multiplie par le conjugué du dénominateur

$\Rightarrow \dfrac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

La première racine carrée de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_1 = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

-**Pour** $x_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}$ [...] $\Rightarrow y = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$

La seconde racine carrée de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est $z_2 = x_2 + iy_2$

$z_2 = (-\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1.4. DÉTERMINER LA VALEUR EXACTE D'UN COSINUS ET D'UN SINUS

• **Étape 3 : En déduire la valeur exacte** de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

La forme trigonométrique de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est

$Z = 16(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$

La première racine carrée de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est

$z_1 = x_1 + iy_1$ $\Rightarrow z_1 = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

La seconde racine carrée de $z = -8\sqrt{3} + 8i$ est

$z_2 = x_2 + iy_2$ $\Rightarrow z_2 = (-\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$$z^2 = Z \Rightarrow z^2 = 16(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow z = \left[16(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})\right]^{\frac{1}{2}}$$

Rappel de la formule de Moivre : $(r(cos\theta + isin\theta))^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$

$$\Rightarrow z = \left[16^{\frac{1}{2}}(cos\frac{5\pi}{6} * \frac{1}{2} + isin\frac{5\pi}{6}) * \frac{1}{2}\right]$$

$\Rightarrow z_1 = 4(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12})$ car z_2 est impossible sur cercle trigonométrique.

z_{1T} **Trigonométrique** $= z_{1A}$ **Algébrique**

$$\Rightarrow 4(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow 4cos\frac{5\pi}{12} + 4isin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\begin{cases} 4cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ 4isin\frac{5\pi}{12} = i(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ 4sin\frac{5\pi}{12} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Les valeurs exacte de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ sin\frac{5\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \end{cases}$

↦ *Nombre Complexes Bac*

Chapitre 2

INVICTUS exercices énoncés

2.1. Écrire sous la forme algébrique, trigonométrique et exponentielle

2.1.1 Écrire sous la forme algébrique

• $\looparrowright$ $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$

• $\looparrowright$ $z_2 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

2.1.2 Écrire sous la forme trigonométrique et exponentielle

• $\looparrowright$ $Z_1 = \dfrac{3}{1-i}$

• $\looparrowright$ $Z_2 = (-1+i)^n$

2.2. Calculer modules et arguments

2.2.1 $Z = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

1) Calculer Z^2

2) Déterminer le module et l'argument de Z^2

3) En déduire le module et l'argument de Z

4) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $cos(\dfrac{\pi}{12})$ et de $si(\dfrac{\pi}{12})$

2.3. Résoudre dans $\mathscr{C}$ les équations N1

2.3.1 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

2.3.2 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2 - (3+i)Z + 2(1+i)$

2.3.3 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $(1+i)Z^2-\sqrt{2}Z+1-i=0$

2.3.4 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $(4-3i)Z^2-(10+5i)Z+3+5i=0$

2.4. RÉSOUDRE DANS $\mathscr{C}$ LES ÉQUATIONS N2

2.4.1 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2+(2i-1)Z-1=0$

1) Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2+(2i-1)Z-1=0$

2) En déduire les solutions dans $\mathscr{C}$ de l'équation : $Z^6+(2i-1)Z^3-1-i=0$

2.5. RÉSOUDRE DANS $\mathscr{C}$ LES ÉQUATIONS N3

1) Résoudre dans $\mathscr{C}$ l'équation $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\alpha}$

Cette équation admet-elle une solution pour toutes valeur de α ?

Que peut-on dire des solutions obtenues ?

2) Résoudre dans $\mathscr{C}$ l'équation $Z^5=1$

3) Déduire des résultats précédents, résoudre dans $\mathscr{C}$ l'équation : $(1+iz)^5-(1-iz)^5=0$

Chapitre 3

INVICTUS exercices corrigés

3.1. ÉCRIRE SOUS LA FORME ALGÉBRIQUE, TRIGONOMÉTRIQUE ET EXPONENTIELLE

3.1.1 Écrire sous la forme algébrique

• $\hookrightarrow$ $\boxed{z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}}$

$\Rightarrow \dfrac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$ On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.
$\Rightarrow \dfrac{9+12i+18i-24}{3^2+4_2}$ On factorise
$\Rightarrow \dfrac{-15+30i}{25}$ On regroupe
$\Rightarrow \boxed{Z_1 = -\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i}$ On simplifie.

• $\hookrightarrow$ $\boxed{z_2 = \dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}}$

$\Rightarrow \dfrac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}$ Réduction au même dénominateur commun
$\Rightarrow \dfrac{-3+7i-3-7i}{1^2+1^2}$ On factorise
$\Rightarrow \boxed{Z_2 = -3}$ On simplifie

3.1.2 Écrire sous la forme trigonométrique et exponentielle

• $\hookrightarrow$ $\boxed{Z_1 = \dfrac{3}{1-i}}$

• **Posons** $\alpha = (1-i)$

∘ **Module** de $\alpha \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{2}$

○ **Argument** de α

$\Rightarrow$ Soit / $Arg(\alpha) = \theta + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases} \begin{cases} cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Arg, selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ est $-\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $\alpha = 1 - i$ Son Module $|\alpha| = \sqrt{2}$ et son Argument $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

Rappel : $z = \dfrac{\beta}{\alpha} \Rightarrow Arg(\dfrac{\beta}{\alpha}) + 2k\pi \Rightarrow Arg(z) = Arg(1) - Arg(\alpha)$

○ **La solution**

$\Rightarrow$ $Z_1 = 3 * \dfrac{1}{\alpha} = 3 * \dfrac{1}{1-i}$ Son Module $|Z| = 3 * \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et son Argument $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Rightarrow$ **Forme trigonométrique** $Z_1 = 3 * \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(cosc(\dfrac{\pi}{4}) + isin(\dfrac{\pi}{4})\right)$

$\Rightarrow$ **Forme exponentielle** $Z_1 = 3 * \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\dfrac{\pi}{4})}$

• $\looparrowright$ $Z_2 = (-1+i)^n$

• **Posons** $\alpha = (-1+i)$

○ **Module** de $\alpha \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{2}$

○ **Argument** de α

$\Rightarrow$ Soit / $Arg(\alpha) = \theta + 2k\pi$

$\Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta = \dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|} \end{cases} \begin{cases} cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Arg, selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ est $\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $\alpha = -1 + i$ Son Module $|\alpha| = \sqrt{2}$ et son Argument $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Rappel : $Z_2 = (-1+i)^n = \left[\sqrt{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^2; \dfrac{3n\pi}{4}\right]$ **Formule de Moivre**

○ **La solution**

$\Rightarrow$ **Forme trigonométrique** $Z_1 = \sqrt{2}^n\left(cosc(\dfrac{3n\pi}{4}) + isin(\dfrac{3n\pi}{4})\right)$

$\Rightarrow$ **Forme exponentielle** $Z_1 = \sqrt{2}^n e^{i(\dfrac{3n\pi}{4})}$

3.2. Calculer modules et arguments

3.2.1 $Z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

1) **Calculer** Z^2

• **Posons** $a=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ et $b=(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

• **Posons l'identité remarquable** $Z^2=[(a)+i(b)]^2=(a)^2+i(b)^2=a^2+2aib-b^2$

• **Développons** $=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2(\sqrt{6}+\sqrt{2})i(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$
$=(6+2+2\sqrt{12})+2 1(6-2)-(6+2-2\sqrt{2})$
$=4\sqrt{2}+8i$

$Z^2=8\sqrt{3}+8i$

2) **Déterminer le module et l'argument de** Z^2

• **Module**
$|Z^2|=8\sqrt{3}+8i=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+(8)^2}=\sqrt{(64*3)+64}$
$|Z^2|=16$

• **Argument**
$\Rightarrow$ Soit / $Arg(Z^2)=\theta+2k\pi$

$$\Rightarrow\begin{cases} cos\theta=\dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} \\ sin\theta=\dfrac{\mathscr{I}m(Z)}{|Z|}\end{cases}\quad\begin{cases} cos\theta=\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta=\dfrac{8}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{1}}{2}\end{cases}$$

Arg, selon le cercle trigonométrique l'angle remarquable de θ est $\dfrac{\pi}{6}$

$ArgZ^2=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

3) **En déduire le module et l'argument de** Z

• **Module**
$|Z^2|=16\Rightarrow$ $|Z|=4$

• **Argument**
$ArgZ^2=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathscr{Z}\Rightarrow$ $ArgZ=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ On divise par 2!

4) **Déduire des résultats précédents la valeur exacte de** $cos(\dfrac{\pi}{12})$ **et de** $sin(\dfrac{\pi}{12})$

• **Forme algébrique** de Z : $Z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
• **Forme trigonométrique** de Z : $Z=4\left(cos(\dfrac{\pi}{12})+sin(\dfrac{\pi}{12}\right)$
• **on compare les parties réels et les parties imaginaire** de Z

$cos(\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ et $sin(\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

3.3. RÉSOUDRE DANS $\mathscr{C}$ LES ÉQUATIONS N1

3.3.1 *Résoudre dans* $\mathscr{C}$: $Z^2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

• **Factorisation de l'équation :** $Z^2=\sqrt{2}(1+i)\Leftrightarrow Z^2=\alpha*\beta$

- **Posons :** $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = (1+i)$

- **Calculons :** $\alpha = \sqrt{2}$

- Module $|\alpha| = \sqrt{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$

- Argument $\Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow 0 \\ sin\theta = \dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{2}} = ND \end{cases}$

-Conclusion $\alpha = [\sqrt{2}; 0]$

- **Calculons :** $\beta = 1+i$

- Module $|\beta| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

- Argument $\Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

-Conclusion $\beta = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

- **Calculons :** $Z^2 = \alpha * \beta$

$[\sqrt{2}; 0] * \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right] = \left[2; \dfrac{\pi}{4}\right]$ Multiplication parties réelles et parties imaginaires

- **Racines carrées de :** Z^2

$z_1 = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{8}\right]$ Pourquoi 8 $z_2 = -z_1\left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{8} + \pi\right] = \left[\sqrt{2}; \dfrac{9\pi}{8}\right]$

- **Les solutions :** $z_1 = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{8}\right]$ et $z_2 = \left[\sqrt{2}; \dfrac{9\pi}{8}\right]$

3.3.2 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2 - (3+i)Z + 2(1+i)$

- **Résoudre l'équation du second degré :** $Z^2 - (3+i)Z + 2(1+i) = 0$

- **Calculons Δ :** $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1$, $b = -(3+i)$ et $c = 2(1+i)$

$\Rightarrow \Delta = (-(3+i))^2 - [4 * 1 * 2(1+i)] \Rightarrow \Delta = 9 + 6i - 1 - [8 + 8i] = 8 + 6i - 8 - 8i = -2i$

$\Leftrightarrow$ Forme trigonométrique $\Delta = \left[2; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ Car son module est 2 et son argument $-\dfrac{\pi}{2}$

- **Calculons une racine carrée δ de Δ :** $\delta^2 = \Delta$

$[\rho^2; 2\theta] = \left[2; -\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \delta = \left[\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$ Car $\rho^2 = 2$ et $2\theta = -\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Forme algébrique $\delta = (1-i)$ Car $a = \rho cos\theta = \sqrt{2}cos + \dfrac{\pi}{4} = 1$ $a = \rho sin\theta = \sqrt{2}cos - \dfrac{\pi}{4} = 1$

- **L'équation admet deux solutions :**

$z_1 = \dfrac{(3+i)-(1-i)}{2} = \dfrac{3+i-1+i}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$

$z_2 = \dfrac{(3+i)+(1-i)}{2} = \dfrac{3+i+1-i}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$z_1 = (1+i)$ et $z_2 = 2$

3.3.3 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $(1+i)Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 - i = 0$

- **Résoudre l'équation du second degré :** $(1+i)Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 - i = 0$

• **Calculons Δ :** $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = (1+i)$, $b = -\sqrt{2}$ et $c = (1-i)$

$\Rightarrow \Delta = (-\sqrt{2})^2 - [4 * (1+i) * (1-i)] = 2 - \left[4(1-i)^2\right] = 2 - [4(1+1)] = -6$ Car $i^2 = -1$

On peut écrire $\Delta = -6 = 6i^2 = (\sqrt{6}i)^2$ Car $i^2 = -1$

• **Calculons une racine carrée δ de Δ :** $\delta^2 = \Delta$ $\Delta = (\sqrt{6}i)^2$ donc $\delta = i\sqrt{6}$

• **L'équation admet deux solutions :**

$$z_1 = \frac{(\sqrt{2}) - (i\sqrt{6})}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{2}) - (i\sqrt{6})}{2(1+i)} * \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$$
$$z_2 = \frac{(\sqrt{2}) + (i\sqrt{6})}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{2}) - (i\sqrt{6})}{2(1+i)} * \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

3.3.4 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $(4-3i)Z^2 - (10+5i)Z + 3 + 5i = 0$

• **Résoudre l'équation du second degré :** $(4-3i)Z^2 - (10+5i)Z + 3 + 5i = 0$

• **Calculons Δ :** $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = (4-3i)$, $b = -(10+5i)$ et $c = (+3+5i)$

$\Rightarrow \Delta = [-(10+5i)]^2 - [4 * (4-3i)(+3+5i)] = 100 + 100i - 25 - 4(12 + 20i - 9i + 15) = -33 + 56i$

Soit $\Delta = -33 + 56i$

Il est impossible de déterminer un argument exacte de Δ

Donc on va chercher une racine carrée de Δ, notée δ, en utilisant les formes algébriques des nombres complexes.

• **On cherche donc :** $\delta = x + iy$ avec x et y réels tel que $\delta^2 = \Delta$

$$(x+iy)^2 = -33 + 56i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i2xy = -33 + 56i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \\ 2xy = 56 \end{cases}$$

On ajoute l'équation du module : $x^2 - y^2 = \sqrt{(-33)^2 + (+56)^2} = 65$ D'où $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \\ x^2 + y^2 = 65 \\ 2xy = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 49 \\ xy = 28 \end{cases}$

On en déduit que $\delta = 4 + 7i$ est une racine carré de Δ

• **L'équation admet deux solutions :**

$$z_1 = \frac{10+5i-4-7i}{2(4-3i)} = \frac{3-i}{4-3i} = \frac{(3-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{15+5i}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$
$$z_2 = \frac{10+5i+4+7i}{2(4-3i)} = \frac{7+6i}{4-3i} = \frac{(7+6i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{10+45i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$z_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \text{ et } z_2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$$

3.4. RÉSOUDRE DANS $\mathscr{C}$ LES ÉQUATIONS N2

3.4.1 Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$

1) Résoudre dans $\mathscr{C}$: $Z^2+(2i-1)Z-1=0$

• **Calculons Δ :** $\Delta=b^2-4ac$ avec $a=1$, $b=(2i-1)$ et $c=(-1-i)$
$\Rightarrow \Delta=(2i-1)^2-[4*1*(-1-i)]=(-4-4i+1)+4+4i=1$ Soit $\Delta=1$

• Une racine carré de Δ est donc $\delta=1$

• **L'équation admet deux solutions :**
$z_1=\dfrac{-2i+1-1}{2}=-i$ et $z_2=\dfrac{-2i+1+1}{2}=1-i$

$z_1=-i$ et $z_2=1-i$

2) En déduire les solutions dans $\mathscr{C}$ de l'équation : $Z^6+(2i-1)Z^3-1-i=0$

• **Résoudre :** $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

• **Posons :** $Z=z^3$ l'équation devient $Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$ ★ $z^6=Z^2$ si $Z=z^3$

• **L'équation à deux solutions :**

En utilisant les résultats de la première question, on obtient deux solutions : $Z_1=-i$ et $Z_2=1-i$

• **Revenons à la recherche de l'inconnue de départ z :**

Pour cela , on doit résoudre les équations $z^3=-i$ et $z^3=1-i$

∘ **Équation** $z^3=-i$

Posons $z=[\rho;\theta]$. On à alors $z^3=-i \Leftrightarrow [\rho^3;3\theta]=\left[1;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ ★ Sans développement?
$\rightarrow$ Égalité des modules : $\rho^3=1$ d'où $\rho=1$
$\rightarrow$ Égalité des arguments : $3\theta=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathscr{Z}$
soit $\theta=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}$ ★ On divise par 3 $\Rightarrow \theta=-\dfrac{\pi}{2}*\dfrac{1}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}$
On obtient 3 solutions ★ car une racine cubique à 3 solutions :

$z_1=\left[1;-\dfrac{\pi}{6}\right]=e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_3=\left[1;\dfrac{7\pi}{6}\right]=e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ★Pour $k\in\{0,1,2\}$

∘ **Équation**$z^3=1-i$

Posons $z=[\rho;\theta]$. On à alors $z^3=-i \Leftrightarrow [\rho^3;3\theta]=\left[\sqrt{2};-\dfrac{\pi}{4}\right]$ ★ Sans développement?

$\rightarrow$ Égalité des modules : $\rho^3=\sqrt{2}$ d'où $\rho=2^{\frac{1}{6}}$
$\rightarrow$ Égalité des arguments : $3\theta=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathscr{Z}$ soit $\theta=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3}$ ★ On divise par 3

On obtient 3 solutions ★

$z_4=\left[2^{1\div 6};-\dfrac{\pi}{12}\right]=2^{1\div 6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_5=\left[2^{1\div 6};\dfrac{7\pi}{12}\right]=2^{1\div 6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et $z_6=\left[2^{1\div 6};\dfrac{5\pi}{4}\right]=2^{1\div 6}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ★Pour $k\in\{0,1,2\}$

1) **Résoudre dans** $\mathscr{C}$ **l'équation** $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\alpha}$

• **Produit en croix, on développe et on factorise**

Cette équation admet-elle une solution pour toutes valeur de α ?

$\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\alpha} \Leftrightarrow (1+iz)=(e^{i\alpha})-i(e^{i\alpha}) \Leftrightarrow iz(e^{i\alpha}+1)=e^{i\alpha}-1$ ★ Disparition car $1-iz=-i(e^{i\alpha})$

Soit $z=\dfrac{(e^{i\alpha}-1)}{i(e^{i\alpha}}$ En factorisant l'angle moitié, on obtient $z=\dfrac{e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}+e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right)}$

• **Or, à l'aide de la formule d'Euler, on peut écrire :** $e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{\frac{-i\alpha}{2}}=2isin(\frac{\alpha}{2})$ et $e^{\frac{i\alpha}{2}}+e^{\frac{-i\alpha}{2}}=2icos(\frac{\alpha}{2})$

D'où $z=\dfrac{sin(\frac{\alpha}{2})}{cos(\frac{\alpha}{2})}=tan(\frac{\alpha}{2})$ pour $\alpha\neq\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathscr{Z}$ On remarque que les solutions sont des nombres réel.

2) **Résoudre dans** $\mathscr{C}$ **l'équation** $Z^5=1$

Posons $Z=[\rho;\theta]$. Alors $Z^5=[\rho^5;5\theta]=[1;0]$

→ Égalité des **modules** : $\rho^5=1$ d'où $\rho=1$

→ Égalité des **arguments** : $5\theta=0+2k\pi$ avec $k\in\mathscr{Z}$ Soit $\theta=k\dfrac{2\pi}{5}$

On obtient 5 solutions : $Z=\left[1;k\dfrac{2\pi}{5}\right]=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ avec $k\in\{0,1,2,3,5\}$

3) **Déduire des résultats précédents, résoudre dans** $\mathscr{C}$ **l'équation :** $(1+iz)^5-(1-iz)^5=0$

$(1+iz)^5-(1-iz)^5=0 \Leftrightarrow (1+iz)^5=(1-iz)^5 \Leftrightarrow \left(\dfrac{(1+iz)}{(1-iz)}\right)^5=1$

• Posons $Z=\left(\dfrac{(1+iz)}{(1-iz)}\right)$, l'équation devient $Z^5=1$

• A l'aide des résultats de la question précédente, on obtient

$Z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ avec $k\in\{0,1,2,3,5\}$

Soit $\dfrac{(1+iz)}{(1-iz)}=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ avec $k\in\{0,1,2,3,5\}$

• En utilisant maintenant le résultat de la première question avec $\alpha=k\dfrac{2\pi}{5}$

On obtient finalement : $z=tan\dfrac{\alpha}{2}=tan\dfrac{k\pi}{5}$ avec $k\in\{0,1,2,3,5\}$

• En conclusion l'équation admet 5 solutions : $o,\ tan\dfrac{\pi}{5},\ tan\dfrac{2\pi}{5},\ tan\dfrac{3\pi}{5}$ et $tan\dfrac{4\pi}{5}$

3.6. PUISSANCE ET EXPONENTIELLE

Puissance	Exponentielle	Notes
$x^m\, x^n = x^{m+n}$	$e^x.e^y = e^{x+y}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	
$x^m\, y^m = (xy)^m$		
$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$		
$(x^n)^m = x^{n*m}$	$(e^n)^m = e^{n*m}$	$e^{-x+x} \Rightarrow 0$
$x^0 = 1$	$e^0 = 1$	$e^3 + e^3 \Rightarrow 2 * e^3$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$	$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$	$n = -2x \Rightarrow e^{-2x}$
$(x^m)^n = x^{mn}$	$(e^x)^n = e^{nx}$	$e^2 - 4e \Rightarrow e(e-4)$
$(-1)^n = \begin{cases} +1 Sinestpair \\ -1 Sinestimpair \end{cases}$		

• $3\theta = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ **On divise par 3** $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} * \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

• **Forme algébrique** $z = -8\sqrt{3} - 8i \Leftrightarrow$ de **module** $|z| = \rho = 16$ et d'**argument** $Arg = \theta = \frac{5\pi}{6}$

Forme exponentielle $\Leftrightarrow z = 16.e^{i\frac{5\pi}{6}}$ car $\rho = 16$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Forme trigonométrique $\Leftrightarrow z = 16\left(cos(\frac{5\pi}{6}) + sin(\frac{5\pi}{6})\right)$

Avec $|z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$ et argument $= \begin{cases} cos\theta = \frac{a}{\sqrt{|z|}} \\ sin\theta = \frac{b}{\sqrt{|z|}} \end{cases}$

En déduire θ avec deux nombres remarquable sur le cercle trigonométrique.

Applications utiles : *Calculette DCODE | Travailler avec formules exponentielles*

Chapitre 4

Appliquer les formules sur les nombres complexes

Puissance	Exponentielle	Notes
$e^a.e^b =$	e^{a+b}	-
$e^{-a} =$	$\frac{1}{e^a}$	
$\frac{e^a}{e^b} =$	e^{a-b}	
$(e^a)^n =$	$e^{n.m}$	
$e^0 =$	1	
-	-	
-	-	
-	-	$e^a + e^b = RIEN$
-	-	$e^a - e^b = RIEN$

4.1. Simplifier les expressions

4.1.1 Série 1

- $(e^3)^2 * e^5 = e^6 * e^5 = e^{6+5} = e^{11}$
- $e^{-2} * e^7 * e = e^{-2} * e^7 * e^1 = e^{-2+7+1} = e^6$
- $\dfrac{e^{-2}}{e^7} = e^{-2-7} = e^{-9} = \dfrac{1}{e^9}$
- $\dfrac{e^{-2}}{e} = e_{-2-1} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$
- $(\dfrac{e^{-2}}{e^{-3}})^3 \Rightarrow (1)\dfrac{e^{-2}}{e^{-3}} = e^5 \Rightarrow (2)(e^5)^3 = e^{15}$
- $(e^2-1)(e^2+1) = (e^2)^2 - 1^2) = e^4 - 1$ Car $_{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$

4.1.2 Série 2

- $\dfrac{x}{(e^2)^2} = \dfrac{x}{e^4} = x * \dfrac{1}{e^4} = x * e^{-4}$
- $e^{2x} * e = e^{2x} * e^1 = e^{2x+1}$
- $\dfrac{e^{4x}}{e^{-x}} = e^{4x-(-x)} = e^{5x}x$
- $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(e^x)^2} = \dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-3x}$ Car $_{\text{formule des puissance}\ \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}}$
- $\dfrac{e^{3x} * e^{-x}}{e^x} = \dfrac{e^{3x+(-x)}}{e^x} = \dfrac{2x}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
- $e^x * (e^{-2x})^3 = e^x * e^{-6x} = e^{-5x}$

4.2. Développer les expressions

4.2.1 Série 1

- $(e^2-e)^2 = (e^2)^2 - 2 * e^2 * e^1 + e^2 = e^4 - 2e^2 + e^2$ Car $_{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$
- $(e^3-e)(1-e^2) = e^3 * 1 -^3 * e^2 - e * 1 + e * e^2 = e^3 - e^5 - e + e^3 = 2e^3 - e^5 - e$
- $e^2(e^{-2}+e) = e^2 * e^{-2} + e^2 * e^1 = e^0 + e^3 = 1 + e^3$ Car $e^0 = 1$
- $e(e^{-1}+e^2) = e^1 * e^{-1} + e^1 * e^2 = e^{1-1} + e^{1+2} = 1 + e^3$
- $(e^4-e^{-4}) = (e^4)^2 - 2 * (e^4) * e^{-4} + (e^{-4})^2 = e^8 - 2e^0 + e^{-8} = e^8 - 2 + e^{-8}$ Car $_{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$
- $(1-e^3)(1+e^3) = 1^2 - (e^3)^2 = 1 - e^6$ Car $_{(a-b)(a+b)=a^2+b^2}$

4.2.2 Série 2

4.3. Factoriser

4.3.1 Série 1

4.3.2 Série 2

4.4. SIMPLIFIER

4.4.1 Série 1

4.4.2 Série 2