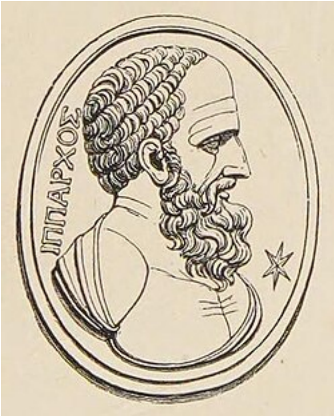


Mathématiques

Logique et algèbre

Exercices : Trigonométrie

Version 1.1.0

Hipparque de Nicée est considéré comme le fondateur de la **trigonométrie**.
Hipparque est reconnu comme le plus grand observateur astronomique de l'Antiquité et, par certains, le plus grand astronome de l'Antiquité.
Il a développé la trigonométrie et construit des **tables trigonométriques**, et il a résolu plusieurs problèmes de trigonométrie sphérique.

↦ *Hipparque de Nicée*

Table des matières

Première partie

Exercices de trigonométrie

Chapitre 1

Valeurs des fonctions trigonométriques

1.1 Exercice 01

1.1.1 Énoncé

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes :
- $cos\left(\frac{538\pi}{3}\right)$
- $sin\left(\frac{123\pi}{6}\right)$
- $tan\left(-\frac{77\pi}{4}\right)$

1.1.2 Solution

- $cos\left(\frac{538\pi}{3}\right)$

→ Calcul du principal $-\frac{2\pi}{3}$

→ Recherche sur le cercle trigonométrique $-\frac{1}{2}$

- $cos\left(\frac{123\pi}{6}\right)$

→ Calcul du principal $\frac{\pi}{3}$

→ Recherche sur le cercle trigonométrique 1

- $sin\left(-\frac{77\pi}{4}\right)$

→ Calcul du principal $\frac{3\pi}{4}$

→ Recherche sur le cercle trigonométrique -1

↦ *Calculette trigonométrique*

1.2 Exercice 02

1.2.1 Énoncé

• Déterminer la valeur de $cos(\frac{\pi}{12})$

• Déterminer la valeur de $sin(\frac{\pi}{12})$

1.2.2 Solution

• En appliquant la formule $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$

→ On obtient $2cos^2(\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{2\pi}{12}) + 1 = cos(\frac{\pi}{6}) + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

→ On à alors $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

→ On à donc $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,9659$

• En appliquant la formule $cos(2x) = 1 - sin^2(x)$

→ On obtient $sin^2(\frac{\pi}{12}) = 1 - cos^2(\frac{2\pi}{12})$

→ On à alors $sin^2(\frac{\pi}{12}) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

→ On à alors $sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 0,2588$

1.3 Exercice 03

• Calculer $tan(\frac{\pi}{8})$

1.3.1 Solution

• On remarque que $2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

→ On obtient $tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{tan(\frac{\pi}{8}) + tan(\frac{\pi}{8})}{1 - tan^2(\frac{\pi}{8})}$

→ On à alors $\frac{2tan(\frac{\pi}{8})}{1 - tan^2(\frac{\pi}{8})}$

Puisque $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, $tan(\frac{\pi}{8})$ est solution de l'équation $x2 + 2x - 1$

→ On à 2 solutions a cette équation $x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ $x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$

Comme on sait que $tan(\frac{\pi}{4}) > 0$ puisque $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

→ On en déduit que $tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1 = 0,4142$

1.4 Exercice 04

Soit $x \in]-\pi, \pi[+ 2k\pi$. On pose $t = tan(\frac{x}{2})$ Démontrer les formules suivantes :

- $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

1.4.1 Solution

Bien sûr, on peut déduire la troisième solution des deux autres. La plus facile est la troisième, car d'après la formule de duplication

• $tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

$\rightarrow$ En appliquant la formule on obtient $tan(x) = tan\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$

• $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$\rightarrow$ on a par ailleurs $sin(x) = sin\left(2\frac{x}{2}\right) = sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) = 2tan(\frac{x}{2})cos^2(\frac{x}{2})$

$\rightarrow$ puisque $cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+tan^2(\frac{x}{2})}$

$\rightarrow$ on déduit $sin(x) = 2tan(\frac{x}{2}) * \frac{1}{1+tan^2(\frac{x}{2})}$

$\rightarrow$ en remplaçant $tan(\frac{x}{2})$ par t on démontre que $\frac{2t}{1+t^2}$

1.5 Exercice 05

1.5.1 Énoncé

Démontrer que , $\forall n \geqslant 1$ et $\forall x \in \mathscr{R}$ $|sin(nx)| \leqslant n|sin(x)|$

1.5.2 Solution

• On va démontrer la résultat par récurrence sur n. On fixe $x \in \mathscr{R}$ et pour $\forall n \geqslant$, on a P_n $|sin(nx)| \leqslant n|sin(x)|$

• Initialisation : la propriété pour $P_{n=1} = 1.$ est clairement vrai.

• Hérédité : Soit $n \geqslant$ tel que P_n est vrai et prouvons P_{n+1} Alors on a $((n+1)x) = sin(nx)cos(x) + sin(x)cos(nx)$

• En utilisant l'inégalité triangulaire, puis $|cos(x)| \leqslant 1$ et $|cos(nx)| \leqslant 1$, on trouve

$sin((n+1)x)$

$\leqslant |sin(nx)|.|cos(x)| + |sin(x)|.|cos(nx)| \leqslant |sin(nx)|.1 + |sin(x)|.1 \leqslant n|sin(x)| + |sin(x)| \leqslant (n+1)|sin(x)|$

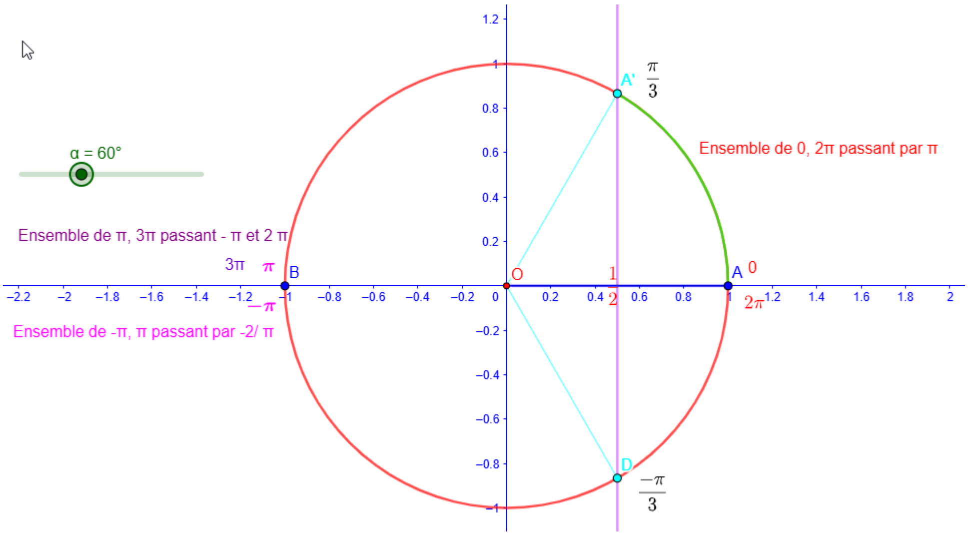
• ou l'avant dernière ligne vient de l'hypothèse de récurrence. Donc P_{n+1} est vraie

• Conclusion : La propriété P_n est vrai $\forall n \geqslant 1$

Chapitre 2

Équations et inéquations trigonométriques

2.1 Équation $cos x = \frac{1}{2}$



$\mapsto$ *Cercle trigonométrique*

Résoudre dans $\mathscr{R}$

$$S_{\mathscr{R}} = \left\{ \frac{-\pi}{3} + k * 2\pi ; \frac{+\pi}{3} + k * 2\pi ; k \in \mathscr{Z} \right\} \qquad [+ \, ou \, - \quad k \, fois \, le \, tour \, du \, cercle]$$

Résoudre dans des intervalles particuliers

En déduire les solutions dans les sous ensembles suivants :

• dans $]-\pi;+\pi]$

Sur le cercle trigonométrique, on démarre en $-\pi$ et on arrive en $+\pi$.
Lors de ce déplacement, on croise deux points $\frac{-\pi}{3}$ et $\frac{+\pi}{3}$.

$$S_{]-\pi;+\pi]}=\left\{\frac{-\pi}{3};\frac{+\pi}{3}\right\}$$

∘ Pour $\frac{-\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}$ est dans l'intervalle.

∘ Pour $\frac{+\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{+\pi}{3}$ est dans l'intervalle.

• Dans $]0;+2\pi]$

Sur le cercle trigonométrique, on démarre en 0 et on arrive en 2π.
Lors de ce déplacement, on croise deux points $\frac{+\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$.

$$S_{]0;+2\pi]}=\left\{\frac{+\pi}{3};\frac{+5\pi}{3}\right\}$$

∘ Pour $\frac{+\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{+\pi}{3}$ est dans l'intervalle

∘ Pour $\frac{-\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $]0;2\pi]=\left]0;\frac{6\pi}{3}\right]$

Prenons donc $k=1\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}+1*2\pi\Rightarrow\frac{-\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ est dans l'intervalle $]0;2\pi]=\left]0;\frac{6\pi}{3}\right]$

• dans $[\pi;+3\pi[$

Sur le cercle trigonométrique, on démarre en π et on arrive en 3π.
Lors de ce déplacement, on croise deux points $\frac{+\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$.

$$S_{[\pi;+3\pi[}=\left\{\frac{+5\pi}{3};\frac{+7\pi}{3}\right\}$$

∘ Pour $\frac{-\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[\pi;+3\pi[=\left]\frac{3\pi}{3};\frac{9\pi}{3}\right]$

Prenons donc $k=1\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}+1*2\pi\Rightarrow\frac{-\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ est dans l'intervalle $[\pi;+3\pi[=\left]\frac{3\pi}{3};\frac{9\pi}{3}\right]$

∘ Pour $\frac{+\pi}{3}$ SI $k=0\longrightarrow$ ALORS $\frac{-\pi}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[\pi;+3\pi[=\left]\frac{3\pi}{3};\frac{9\pi}{3}\right]$

Prenons donc $k=1\longrightarrow$ ALORS $\frac{\pi}{3}+1*2\pi\Rightarrow\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$ est dans l'intervalle $[\pi;+3\pi[=\left]\frac{3\pi}{3};\frac{9\pi}{3}\right]$

$\longmapsto$ *Résoudre une éqution trigonométrique*

2.2 Équation $2cos2x+4cosx-1=0$

Rappels :
• Formule fondamentale : $cos^2x+sin^2x=1$
• Formule de duplication : $cos2x=cos^2x-sin^2x$
• $cos^2x=(cosx)^2$

Résoudre dans $\mathscr{R}$

Résoudre dans $\mathscr{R}$ l'équation $2cos2x+4cosx-1=0$.

Conseils :
• Pour résoudre une équation trigonométrique on doit avoir uniquement des cosinus ou des sinus.
• Transformer $cos2x$ en $cosx$.
• Transformer sin^2x en cos...

Méthode :
$2cos2x+4cosx-1=0$
$2(cos^2x-sin^2x)+4cosx-1=0$
$2cos^2x-2sin^2x+4cosx-1=0$
$2cos^2x-2(1-cos^2x)+4cosx-1=0$
$2cos^2x-2+2cos^2x+4cosx-1=0$
$4cos^2x+4cosx-3=0$
$4(cosx)^2+4(cosx)-3=0$

Posons $cosx=X \Rightarrow 4X^2+4X-3=0$ on obtient une **équation du second degré.**

Calcul du discriminant Δ : $a=4$, $b=4$ et $c=-3 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=64$.

Recherche des solutions : Ici $\Delta>0$, il existe deux solutions distinctes.

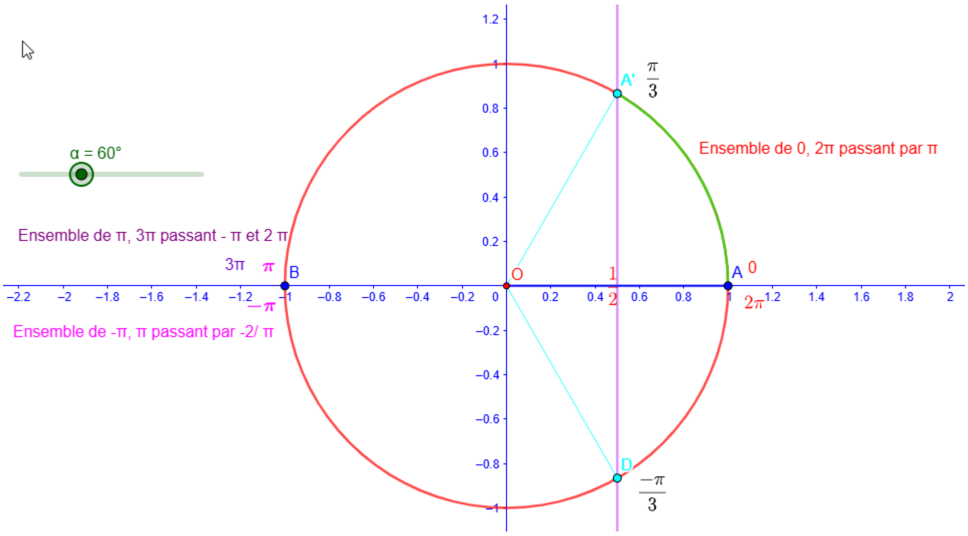
• $X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-8}{2*4}=\dfrac{-3}{2}$

• $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+8}{2*4}=\dfrac{1}{2}$

Revenons à l'équation trigonométrique

Nous avons poser $cosx=X \Leftrightarrow \begin{cases} cosx=\dfrac{-3}{2} \\ cosx=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Seules la solution $cosx=\dfrac{1}{2}$ est vraie. En effet un cosinus ou un sinus ne peut pas être >1.



$$S_{\mathscr{R}} = \left\{ \frac{-\pi}{3} + k * 2\pi ; \frac{+\pi}{3} + k * 2\pi ; k \in \mathscr{Z} \right\}$$

$[+ ou - \quad k fois le tour du cercle]$

$\longmapsto$ *Résoudre une éqution trigonométrique*

2.3 Équation $2^{cos^2x}+2^{sin^2x}=3$

Rappels :
• Formule fondamentale : $cos^2x+sin^2x=1$
• Formule de duplication : $cos2x=cos^2x-sin^2x$
• $cos^2x=(cosx)^2$ • Formule sur les puissances $a^{n-m}=\frac{a^n}{a^m}$ • Formule sur les puissances $a^{n*m}=(a^m)^n$

Résoudre dans $\mathscr{R}$

Résoudre dans $\mathscr{R}$ l'équation $2^{cos^2x}+2^{sin^2x}=3$.

Conseils :
• Pour résoudre une équation trigonométrique on doit avoir uniquement des cosinus ou des sinus.
• Transformer sin^2x en cos...

Méthode :

$2^{cos^2x}+2^{sin^2x}=3$ On sait que $cos^2x+sin^2x=1$ donc $+sin^2x=1-cos^2x$
$2^{cos^2x}+2^{1-cos^2x}=3$
$\frac{2^{cos^2x}*2^{cos^2x}+2}{2^{cos^2x}}=3$
$2^{cos^2+cos^2}+2=3*2^{cos^2x}$
$2^{2cos^2}+2=3*2^{cos^2x}$
$2^{2cos^2}-3*2^{cos^2x}+2=0$
$(2^{cos^2x})^2-3*2^{cos^2x}+2=0$

Posons $2^{cos^2x}=X \Rightarrow X^2-3X+2=0$ On obtient une **équation du second degré.**

Nouvelle méthode

$X^2-3X+2*1=0$
$X^2-2X-1X+2*1=0$
$X*X-2*X-(X-2)=0$
$X(X-2)-(X-2)=0$
$(x-2)(x-1)=0$

Recherche des solutions : Ici il existe deux solutions distinctes.

• $X=2$

• $X=1$

Revenons à l'équation trigonométrique

Nous avons poser $2^{cos^2x}=X \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{cos^2x}=2 \\ 2^{cos^2x}=1 \end{cases}$

• **Résoudre l'équation 1** $2^{cos^2x} = 2$

$2^{cos^2x} = 2^1$

$cos^2x = 1$ Comme les bases sont identiques, il suffit d'égaliser les exposants.

$cos^2x - 1^2 = 0$ Identité remarquable $a^2 - b^2$

$(cos - 1)(cos + 1) = 0$

$$\begin{cases} cosx = 1 \\ cosx = -1 \end{cases}$$

$$\bullet\ cosx = 1 \quad \Rightarrow \quad cosx = cos0 \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ ou \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$cosx = -1$ la solution $x = 2k\pi$

$$\bullet\ cosx = -1 \quad \Rightarrow \quad cosx = cos\pi \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ ou \\ x = -\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$cosx = +1$ la solution $x_1 = +\pi + 2k\pi$ et $x_2 = -\pi + 2k\pi$

• **Résoudre l'équation 2** $2^{cos^2x} = 1$

$2^{cos^2x} = 1^1$

$2^{cos^2x} = 2^0$ Comme les bases sont identiques, il suffit d'égaliser les exposants.

$cos^2 = 0$

$$\bullet\ cosx = 0 \quad \Rightarrow \quad cosx = cos\frac{\pi}{2} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S_{\mathscr{R}} = \left\{2k\pi; \pi + 2k\pi; -\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathscr{Z}\right\}$$ $[+\ ou\ -\quad k\ fois\ le\ tour\ du\ cercle]$

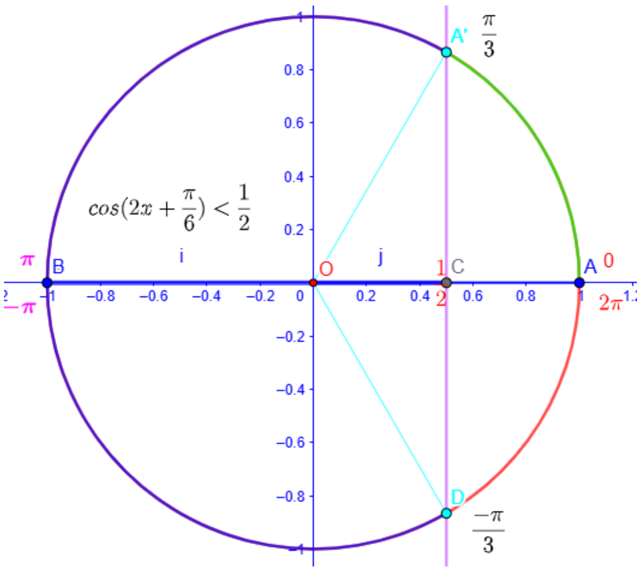
$\mapsto$ *Résoudre une éqution trigonométrique*

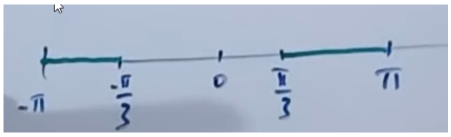
2.4 Équation $sina = sinb$

$\longmapsto$ *Résoudre une éqution trigonométrique*

2.5 Inéquation $cos(2x + \pi \div 6) < 1 \div 2$

Résoudre dans $\mathscr{I} = [-\pi, \pi]$ l'inéquation $cos(2x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$.





Conseils :

- Utilisation du cercle trigonométrique
- On va rechercher les valeurs cosinus qui ce trouve sur le segment bleu BC strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

C'est à dire toutes les valeurs (**abscisses curvilignes**) qui se trouve sur l'arc de cercle bleu.

Méthode :

$$cos(2x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} \leqslant \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Recherche de X dans les deux inéquations :

- Équation 1

$-\pi + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$-\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On multiplie par $\frac{1}{2}$

$-\frac{7\pi}{12} + k\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\rightarrow$ SI $k = 0$ ALORS $-\frac{7\pi}{12} \leqslant x < -\frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ SI $k = 1$ ALORS $-\frac{5\pi}{12} \leqslant x < -\frac{3\pi}{4}$

• Équation 2

$\frac{\pi}{3}+2k\pi<2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$

$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi<2x\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\frac{\pi}{6}+2k\pi<2x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$\frac{\pi}{12}+k\pi<2x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$

→ SI $k=0$ ALORS $\frac{\pi}{12}<x\leqslant\frac{5\pi}{12}$

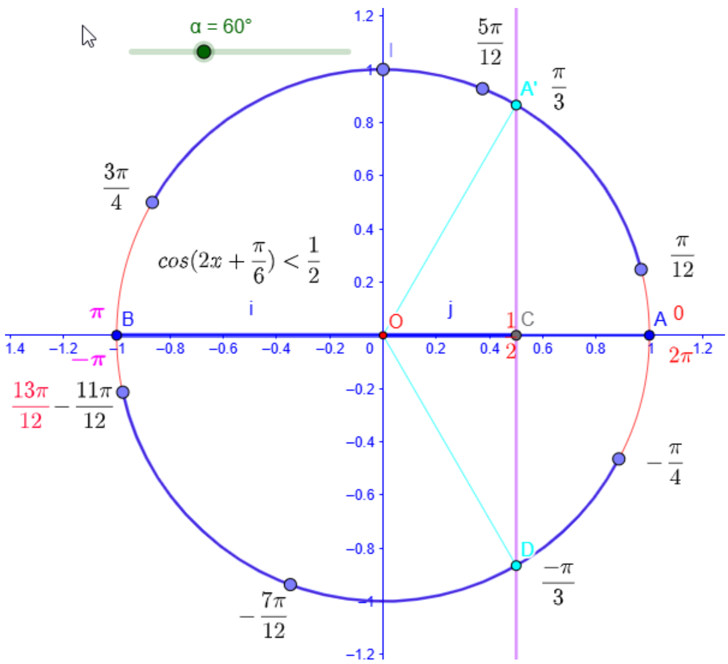
→ SI $k=1$ ALORS $\frac{5\pi}{12}+\pi<x\leqslant\frac{5\pi}{12}+\pi\Rightarrow\frac{13\pi}{12}<x\leqslant\frac{17\pi}{12}$ Ces solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $[-\pi,\pi]$

On doit retrouver le **principal** de $\frac{13\pi}{12}$ et de $\frac{17\pi}{12}$

Recherche de l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ **:**

$S=]-\frac{11\pi}{12},-\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{12},\frac{3\pi}{4}[$

Note : Le principal de $\frac{13}{12}=-\frac{11}{12}$



↦ *Résoudre une inéquation trigonométrique*

2.6 Résoudre les 5 équations

Résoudre dans $\mathscr{R}$ les équations suivantes :

$sinx = \frac{1}{2}, tanx = \sqrt{3}; cosx = -1, sin(3x) = 1, cos(4x) - 2$

Conseils : Chercher d'abord les solutions dans $[0, 2\pi[$

1. Les seules solutions de l'équation dans $[0, 2\pi[$ sont $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$. Par 2π-périodicité, on obtient que les solutions sont les réels $\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les réels $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une autre façon de rédiger est d'écrire que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2. On a $\sqrt{3} = \tan(\pi/3)$ et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (attention! ici les solutions sont définies simplement à π près et non à 2π près).

3. Il n'y a qu'une solution à l'équation dans $[0, 2\pi[$, donnée par $x = \pi$. Les solutions de l'équation sont donc les réels $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. On écrit

$$\sin(3x) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

5. L'équation n'admet pas de solutions! En effet, $\cos$ est à valeurs dans $[-1, 1]$.

2.6.1 Exercice 07

Énoncé

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ **2.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$

3. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(2x)$

Indication

Utiliser les résultats du cours! Pour la dernière question, tenir compte de l'ensemble de définition de la fonction tangente!

Solution

1. On écrit simplement que

$$\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \iff 5x = \frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 5x = \pi - \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En résolvant individuellement chaque équation, on trouve que

$$\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \iff x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. On sait que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x) \iff x + \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = -2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En résolvant individuellement chacune de ces deux équations, on trouve que l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. On remarque d'abord que l'équation a un sens pour $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et pour $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Il faut donc chercher les solutions dans

$$E = \mathbb{R} \backslash \left(\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

Pour $x \in E$, on écrit alors

$$\begin{aligned} \tan(2x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\iff 2x = x + \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ n'est jamais dans E. Ainsi, cette équation n'admet aucune solution.

2.6.2 Exercice 08

Énoncé

Enoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\textbf{1. } \sin x\cos x = \frac{1}{4}. \quad \textbf{2. } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$
$$\textbf{3. } \cos(3x) = \sin(x) \quad \textbf{4. } \tan x = 2\sin x.$$

Indication

En utilisant des formules de trigonométrie, il faut se ramener à des équations du type $\cos a = \cos b$ ou $\sin a = \sin b$, et utiliser des résultats du cours.

Solution

1. On se ramène à une équation simple en remarquant que $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$. L'équation est donc équivalente à $\sin(2x) = \frac{1}{2}$. Mais,

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \frac{1}{2} &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z},\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.\end{aligned}$$

2. On transforme d'abord l'équation par une formule de trigonométrie :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right).$$

En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, on trouve :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \iff x = \frac{5\pi}{14} + \frac{6k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. C'est exactement la même méthode. On trouve que

$$\cos(3x) = \sin x \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. On remarque d'abord que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Si tel est le cas, alors

$$\tan x = 2\sin x \iff 2\sin x\cos x = \sin x \iff \sin(2x) = \sin x.$$

Or,

$$\sin(2x) = \sin x \iff x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

On vérifie (par exemple, sur le cercle trigonométrique), qu'aucune des solutions ne s'écrit $\frac{\pi}{2} + l\pi, l\in\mathbb{Z}$ et on conclut finalement que :

$$\tan x = 2\sin x \iff x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

2.6.3 Exercice 09

Énoncé

Énoncé

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$\textbf{1. } \cos x = \sqrt{3}\sin(x) + 1 \qquad \textbf{2. } \cos x + \sin x = 1 + \tan x.$$

Solution

1. Pour ce type d'équations, la méthode est toujours la même. On commence par la transformer en

$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1.$$

On factorise ensuite par $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

On remarque ensuite que $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. L'équation s'écrit donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

D'après une formule de trigonométrie, elle est encore équivalente à

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Les solutions de cette équation sont les réels x pour lesquels

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Remarquons pour commencer que l'équation a un sens pour les x tels que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pour ces x, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} &\iff (\cos x - 1)(\cos x + \sin x) = 0\\
&\iff \cos x = 1 \text{ ou } \cos(x) + \sin(x) = 0\\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \cos(x) = -\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

On vérifie qu'aucune de ces solutions ne correspond à une valeur interdite pour laquelle l'équation n'a pas de sens.

2.6.4 Exercice 10

WP-CMS

Énoncé

Enoncé

Déterminer les réels x vérifiant $2\cos^2(x)+9\cos(x)+4=0$.

Indication

On pourra poser $X=\cos(x)$.

Solution

Corrigé

On pose $X=\cos(x)$, et l'équation devient $2X^2+9X+4=0$. Son discriminant est $\Delta=49=7^2$, et ses racines sont $X_1=-4$ et $X_2=-1/2$. L'équation $\cos(x)=-4$ n'a aucune solution. Les solutions de l'équation $\cos(x)=-1/2$ sont les réels qui s'écrivent $\frac{4\pi}{3}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, et $\frac{-4\pi}{3}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{4\pi}{3}+k2\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-4\pi}{3}+k2\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2.6.5 Exercice 11

Énoncé

Enoncé

Résoudre sur $[0, 2\pi]$, puis sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \sin(x) \geq 1/2 \qquad \mathbf{2.}\ \cos(x) \geq 1/2$$

Solution

Il faut s'aider du cercle trigonométrique!

1. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a le même résultat :

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

Finalement, par 2π-périodicité, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

2. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right].$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

On conclut de la même façon par 2π-périodicité, mais on utilise plutôt la deuxième expression qui est plus facile. Finalement, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

Chapitre 3

Fonctions trigonométriques

3.1 Fonction trigonométrique $f(x) = sin^2 x + 2cos^2 x$

3.1.1 Énoncé

Soit f la fonction définie dans $\mathscr{R}$ par $f(x) = sin^2 x + 2cos^2 x$.

• Partie I

- ∘ Étudier la parité de f
- ∘ Montrer que f est périodique de période 2π
- ∘ En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0,\pi]$

• Partie II

- ∘ Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi]$
- ∘ En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,\pi]$

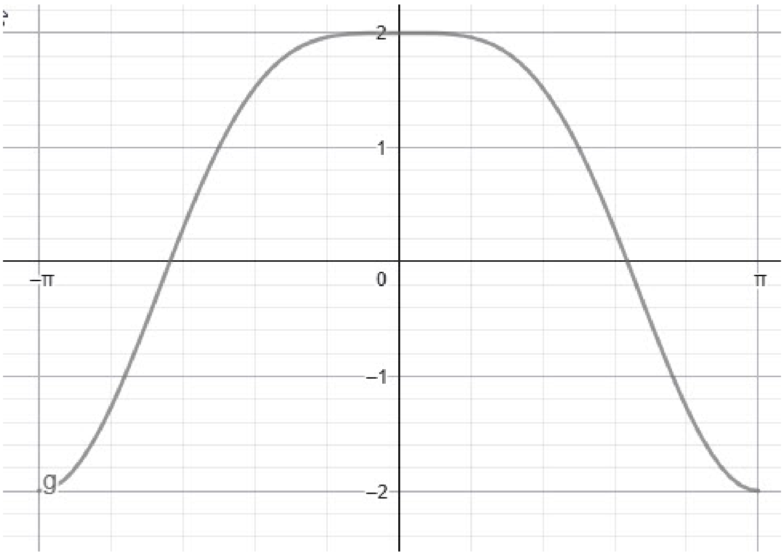
3.1.2 Courbe

Rappels :

- une fonction paire ⇔ $f(-x) = f(+x)$
- une fonction impaire ⇔ $f(-x) = -f(+x)$
- La fonction sinus est impaire ⇔ $sin(-x) = -sin(x)$
- La fonction cosinus est paire ⇔ $cos(-x) = cos(x)$
- Pour démontrer qu'une fonction est périodique 2π
alors $f(x+2\pi) = f(x)$ - $sin(x+2\pi) = sin(x)$ et $cos(x+2\pi) = cos(x)$
- $(u^n)' = n * u^{n-1} * u'$ avec ici $u = sin$

Résolution

• Partie I



○ Étudier la parité de f

$\forall x \in \mathscr{R}$,
$f(-x) = sin^2(-x) + 2cos(-x)$
$f(-x) = (sin(-x))^2 + 2cos(-x)$
$f(-x) = (-sin(x))^2 + 2cos(x)$
$f(-x) = sin^2(x) + 2cos(x)$
$f(-x) = f(x)$ la fonction est donc paire.

○ Montrer que f est périodique de période 2π

$\forall x \in \mathscr{R}$,
$f(x+2\pi) = sin^2(x+2\pi) + 2cos(x+2\pi)$
$f(x+2\pi) = (sin(x+2\pi))^2 + 2cos(x+2\pi)$
$f(x+2\pi) = (sin(x))^2 + 2cos(x)$
$f(x+2\pi) = sin^2(x) + 2cos(x)$
$f(x+2\pi)f(x)$ la fonction f est périodique de période 2π

○ En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0,\pi]$

- Comme f est 2π périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π par exemple sur $[-\pi;\pi]$;
- Comme f est paire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$.

• Partie II

○ Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi]$

$\forall x \in [0;\pi]$,

$f'(x) = 2 - sin(x) * cos(x) + 2x(-sin(x))$
$f'(x) = 2sin(x)\,[cos(x) - 1]$

x	0		π
2		$+$	
$sin(x)$	0	$+$	0
$cos(x) - 1$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$! $\searrow$	-2

- Signe de : +
- Signe de : $sin(x)$ voir sur le cercle trigonométrique quand le signe est positif est quand il est négatif.
- Signe de : $cos(x) - 1$. On rappel la propriété $cos(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow cos(x) - 1 \leqslant 0$
- Signe de $f'(x)$: On applique la règle des signes
- Signe de f, $f'(x)$ négative, donc $f(x)$ est décroissante sur l'intervalle.
- Image $f(0) = sin^2(0) + 2cos(0) = 2$
- Image $f(\pi) = sin^2(\pi) + 2cos(\pi) = -2$

  ◦ En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, \pi]$

Dans la question précédente nous avons étudier la fonction dans le dommaine $[0; \pi]$. On sait que la fonction est paire, alors on peut en déduire la variation deans le domaine $[-\pi; 0]$

x	$-\pi$		0		π
$f(x)$	-2	$\nearrow$! $\nearrow$	$2 \quad 2$	$\searrow$	-2

$\longmapsto$ *Etude Fonction trigonométrique*