π

WP-CMS

Mathématiques

Logique et algèbre

Exercices : Un peu de logique

Version 1.1.0

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

1 Plan du document

2 Exercice 01

2.1 Énoncé

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
8. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
9. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$;
10. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.

2.2 Solution

1. Cette propositions est fausse, car 2 ne divise pas 167.
2. Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.
3. Cette proposition est fausse, car x devrait être simultanément égal à -1 et à -2.
4. Cette proposition est vraie car $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ est vraie (il suffit de prendre $x=-1$) et de la même façon $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$ est vraie (il suffit de prendre $x=-2$).
5. Cette proposition est vraie, par exemple car il s'agit de la négation de la proposition 3, qui est fausse.
6. Cette assertion est fausse. Si on considère x n'importe quel réel non nul, alors le choix de $y=1$ et de $z=2x$ fait que z est différent de xy.
7. Cette assertion est fausse. Prenons n'importe quel y dans $\mathbb{R}^*$. On voudrait trouver x dans $\mathbb{R}^*$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{R}^*$, on ait $z = xy$. Bien sûr, ce n'est pas possible, car le x que l'on choisit devrait convenir à toute valeur de z, ce qui n'est pas possible car il suffit de considérer un z différent de xy.
8. Cette assertion est vraie, car on peut choisir x une fois y et z fixés. On choisit alors $x = z/y$.
9. L'assertion est vraie, il suffit de prendre $a=0$ (convient pour toute valeur de $\varepsilon > 0$).
10. Cette assertion est "évidemment" vraie car elle est plus faible que la précédente (on peut choisir a après $\varepsilon > 0$).

3 Exercice 02

3.1 Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M.$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \implies x \leq 0).$
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2,\ \big(|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\big).$

3.2 Solution

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$
2. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et $x > 0.$
4. $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon.$

$\longmapsto$ *Correctionvidéodel'exercice*

4 Exercice 03

4.1 Énoncé

Soit n un entier naturel non nul. On note C_n la courbe d'équation $y=(1+x)^n$ et D_n la droite d'équation $y=1+nx$.

1. Rappeler l'équation de la tangente à C_n au point A de C_n d'abscisse 0.
2. Tracer (par exemple à l'aide d'un logiciel) C_n et D_n lorsque $n=2,3$.
3. En vous aidant du graphique pour obtenir une conjecture, démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
   - 3.1. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (1+x)^n\geq 1+nx$;
   - 3.2. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ (1+x)^n\geq 1+nx$;
   - 3.3. $\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (1+x)^n=1+nx$;
   - 3.4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists x\in\mathbb{R},\ (1+x)^n=1+nx$;
   - 3.5. $\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ (1+x)^n>1+nx$.

4.2 Solution

1. D'après le cours de lycée, l'équation de la tangente au point A de coordonnée $(0,1)$ est $y=1+nx$.
2.
3.
   - 3.1. C'est faux, par exemple si $n=3$ et $x=-4$.
   - 3.2. C'est vrai. Il y a plusieurs façons de démontrer cela. La plus facile est d'étudier la fonction $f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$ sur $[0,+\infty[$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton.
   - 3.3. C'est vrai : $n=1$ convient.
   - 3.4. C'est vrai : prendre $x=0$.
   - 3.5. C'est vrai : prendre $n=2$, car $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$ si $x\neq 0$.

5 Exercice 04

5.1 Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante;
2. f n'est pas constante;
3. f s'annule;
4. f est périodique.

5.2 Solution

1. On peut l'écrire sous la forme : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$; une autre écriture possible est $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.
2. Si on nie l'assertion précédente, on trouve $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq C$. Si on nie la seconde, on trouve $\exists x, y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$;
4. $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.

6 Exercice 05

6.1 Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Peut-on trouver une fonction qui satisfait cette assertion? Qui ne la satisfait pas?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) < f(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(x+T)$;
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

6.2 Solution

1. f n'admet pas de maximum. Par exemple, $f(x) = x$ satisfait cette assertion. $f(x) = \sin x$ ne satisfait pas cette assertion.
2. Toute fonction vérifie cette assertion, il suffit de prendre $T = 0$.
3. Toutes les valeurs de f sont prises au moins deux fois. $f(x) = \sin x$ est un exemple de fonctions vérifiant cette assertion, $f(x) = x$ un contre-exemple.
4. Cette assertion est absurde, car elle signifierait qu'il existe un réel x tel que $f(x)$ prenne toutes les valeurs réelles possibles. Aucune fonction ne satisfait cette assertion.

7 Exercice 06

7.1 Énoncé

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

7.2 Solution

On a $g \circ f(x) = g(2x)$. Mais $2x$ est pair, et donc $g(2x) = (2x)/2 = x$. Ainsi, $g \circ f(x) = x$.
D'autre part, si x est pair, on a $f \circ g(x) = f(x/2) = x$. Si x est impair, $f \circ g(x) = f(0) = 0$. En particulier, on a $f \circ g \neq g \circ f$ puisque $f \circ g(1) = 0$ alors que $g \circ f(1) = 1$.
f n'est pas surjective, car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises par f. En revanche, f est injective car si $f(x) = f(y)$, on a $2x = 2y$ et donc $x = y$.
g n'est pas injective, car $g(1) = g(3) = 0$ alors que $1 \neq 3$. En revanche, g est surjective. Prenons en effet y n'importe quel entier naturel. Alors, $2y$ est pair et $g(2y) = (2y)/2 = y$.
Des deux études précédentes, on déduit par définition que ni f ni g ne sont bijectives.

8 Exercice 07

8.1 Énoncé

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Indication

Prendre $y > 0$ et résoudre l'équation $y = f(x)$. On doit trouver une unique valeur pour x.

8.2 Solution

La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \iff e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont

$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \text{ et } X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$

Mais $e^x > 0$, et donc on a

$$y = f(x) \iff e^x = -1 + \sqrt{1+y} \iff x = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right).$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et

$$f^{-1}(y) = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right).$$

9 Exercice 08

9.1 Énoncé

Démontrer que la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. Déterminer sa bijection réciproque.

Indication

Prouver que pour tout $w \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, l'équation $f(z) = w$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$ et déterminer cette solution.

9.2 Solution

On va démontrer directement que f est bijective en prouvant que, pour tout $w \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, l'équation $f(z) = w$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{iz-i}{z+3} = w & \iff iz - i = wz + 3w \\ & \iff (i-w)z = 3w + i. \end{aligned}$$

Puisque $w \neq i$, ceci est encore équivalent à

$$z = \frac{3w+i}{i-w}.$$

L'équation admet une unique solution : f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1}(w) = \frac{3w+i}{i-w}.$$

10 Exercice 09

10.1 Énoncé

Enoncé

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E=\mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x=-y$;
2. $E=\mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x+\sin^2 y=1$;
3. $E=\mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p,q\geq 1,\ y=px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Indication

1. A-t-on $1\mathcal{R}1$?
2. Utiliser $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ pour démontrer que c'est réflexif et symétrique.
3. Remarquer que si $x\mathcal{R}y$, alors $x\leq y$.

10.2 Solution

1. La relation n'est pas réflexive, car 1 n'est pas en relation avec lui-même. En effet, $1\neq -1$. La relation est symétrique, car $x=-y \iff y=-x$. Elle n'est pas antisymétrique, car $1\mathcal{R}-1$ et $-1\mathcal{R}1$, alors que $1\neq -1$. Elle n'est pas transitive. En effet, on a $1\mathcal{R}-1$, $-1\mathcal{R}1$ et 1 et 1 ne sont pas en relation. Cette relation n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.
2. De la formule $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, on déduit que la relation est réflexive. Elle est aussi symétrique. En effet, si $x\mathcal{R}y$, ie $\cos^2 x+\sin^2 y=1$, alors on a

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y=(\cos^2 x+\sin^2 y)+(\cos^2 y+\sin^2 x)=1+(\cos^2 y+\sin^2 x)$$

d'une part, et

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y=1+1=2$$

d'autre part, ce qui entraîne bien

$$\cos^2 y+\sin^2 x=1$$

et donc la relation est symétrique.
Elle n'est pas antisymétrique, car $0\mathcal{R}2\pi$ et $2\pi\mathcal{R}0$ alors que $0\neq 2\pi$.
Elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\cos^2 x+\sin^2 y=1 \text{ et } \cos^2 y+\sin^2 z=1$$

soit en sommant

$$\cos^2 x+(\cos^2 y+\sin^2 y)+\sin^2 z=2$$

ce qui implique

$$\cos^2 x+\sin^2 z=1.$$

On a donc affaire à une relation d'équivalence.

3. La relation est réflexive (prendre $p = q = 1$), elle n'est pas symétrique car si $x\mathcal{R}y$, on a forcément $x \leq y$. Ainsi, on a $2\mathcal{R}4$ (prendre $p = 2$, $q = 1$), alors qu'on n'a pas $4\mathcal{R}2$. La relation est antisymétrique : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors on a $x \leq y$ et $y \leq x$ et donc $x = y$. Enfin, la relation est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors il existe des entiers $p, q, a, b \geq 1$ tels que

$$y = px^q \text{ et } z = ay^b.$$

On en déduit

$$z = a(px^q)^b = (ap^b)x^{bq}$$

et donc $x\mathcal{R}z$. La relation est une relation d'ordre.

11 Exercice 10

11.1 Énoncé

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x = x'.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un élément $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

11.2 Solution

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En effet, elle est

- réflexive : $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ car $x = x$;
- symétrique : si $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$, alors $x = x'$ ce qui s'écrit aussi $x' = x$ et qui est équivalent à $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$.
- transitive : si $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et si $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$, alors on a $x = x'$ d'une part et $x' = x''$ d'autre part, donc $x = x''$ ce qui entraine $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.

Chercher la classe d'équivalence de (x_0, y_0), c'est déterminer tous les couples (x, y) tels que $(x, y)\mathcal{R}(x_0, y_0$
Mais,

$$(x, y)\mathcal{R}(x_0, y_0) \iff x = x_0.$$

Autrement dit, x doit être égal à x_0 et y peut être quelconque. On en déduit que la classe d'équivalence de (x_0, y_0) pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est $\{(x_0, y); \; y \in \mathbb{R}\}$.