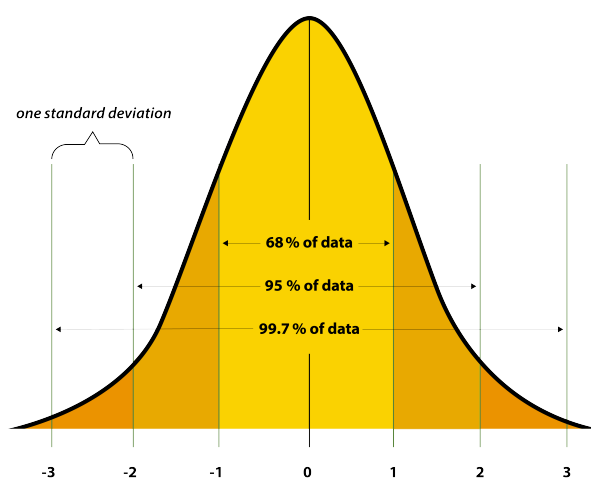




Mathématiques

LES PROBABILITÉS

Cours

Version 1.1.0

→ *Document de référence*

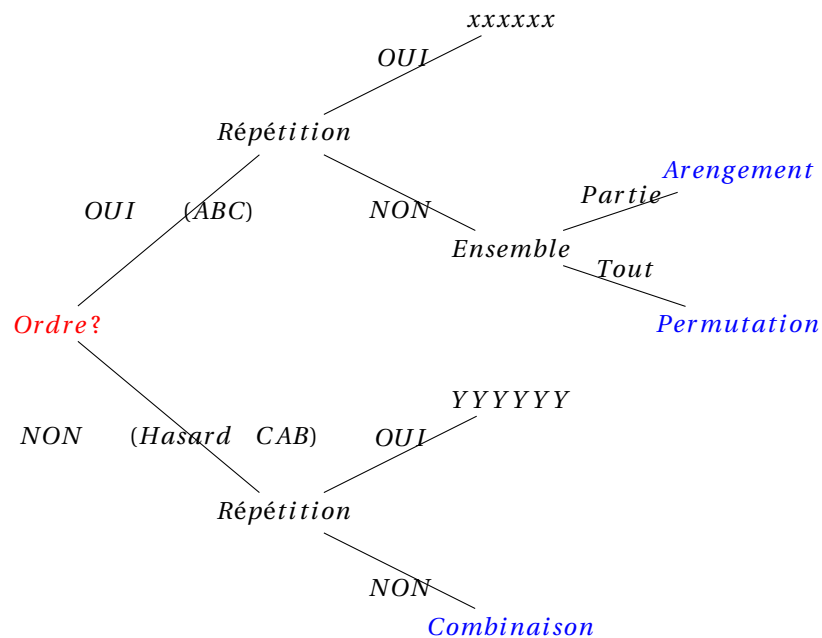
Table des matières

1	Dénombrement	3
1.1	Arbre	3
1.2	Formules	3
1.3	Exemples	4
2	Loi binomiale	5
2.1	Pré-requis	5
2.2	La loi Binomiale en 7 questions	8
2.2.1	Justifier l'emploi de la loi binomiale	8
2.2.2	Calculer l'espérance mathématique (moyenne), la variante et l'écart type	8
2.2.3	Calculer la probabilité de tomber sur <u>exactement</u> 3 événements	8
2.2.4	Calculer la probabilité de tomber sur <u>au moins</u> 3 événements	8
2.2.5	Calculer la probabilité de tomber sur <u>au plus</u> 3 événements	8
2.2.6	Calculer la probabilité de tomber <u>entre deux valeurs</u> sur les 3 événements	8
2.2.7	Déterminer les paramètres n ou p	8
3	La Loi normale	9
3.1	Loi binomiale vers Loi normale : Pourquoi?	9
3.2	Loi normal de Gauss	10
3.3	Loi centrée réduite de GAUSS	11
3.3.1	Présentation de la table de la loi normale centrée réduite	11
3.3.2	Utilisation de la loi centrée réduite	12
3.3.3	THÉORÈMES	12
4	Loi Binomiale et loi normale	13

Chapitre 1

Dénombrement

1.1. ARBRE



1.2. FORMULES

xxxxxx	n^p	Note
Arrangement	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Note
Permutation	$n!$	Note
yyyyyy 1,28	$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$D = 1,29$
Combinaison	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$D = 1,29$

• **SI Ordre + Répétition ALORS Cas xxxxx**

Composer une code à 4(p) chiffres appartenant au domaine $[0,1,...,9](n)$. Ici $n = 10$

Avec répétition à peut avoir le code 2244

Il ya $\Rightarrow n^p = 10^4 = 10000$ codes possibles. $[10|10|10|10]$

SI 1er chiffre est non nulle ALORS il y a $9n^3$ codes possibles. $[9|10|10|10]$

• **SI Ordre + Sans Répétition + Tout l'ensemble ALORS Cas de la permutation**

◦ Le mot MATHS est composé de 5(n) lettres, trouver tous les mots possibles avec les 5 lettres $[1,2,3,4,5](k)$

Il y a $\Rightarrow A_n^k = \frac{5!}{(5-5)!} = 5!$ = 120 mots possibles avec un sens ou pas. $[5|4|3|2|1]$

◦ Le mot TABLEAU $\Rightarrow A_n^k = \frac{7!}{(7-7)!} = 7!$

MAIS il y 2 fois la lettre A ALORS on modifie la formule = $\frac{7!}{2!} = 2520$ mots possibles avec un sens ou pas.

◦ Le mot ANAGRAMME = $\frac{9!}{(3! * 2!)} = 30240$

CAR Anagramme comprend 3 A et 2 M.

• **SI Ordre + Sans Répétition + Partie d'un ensemble ALORS Cas de l'arrangement**

En présence de 20(n) athlètes, on pari sur les trois premiers $[1,2,3](k)$, c'est a dire une partie de l'ensemble.

Ici pas de répétition possible, car le 1er athlètes ne peut pas arrivé 2ème ou 3ème.

Il ya $\Rightarrow A_n^k = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$ arrivées possible. Ou $[20|19|18]$ chances $\Rightarrow 20 * 19 * 18 = 6840$

• **SI Non ordonné + Sans Répétition ALORS Cas de la combinaison**

Une classe est composée de 30(n) étudiants trouver le nombre de groupes de 3 $[1,2,3](k)$ avec $k < n$

Il ya $\Rightarrow C_n^k = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$ groupes possibles avec un sens ou pas. $P(x=k)C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• **SI Non ordonné + Avec Répétition ALORS Cas yyyy**

Il y a $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$

Chapitre 2

Loi binomiale

2.1. PRÉ-REQUIS

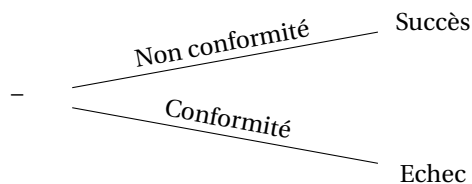
Pour appliquer **la loi binomiale** les pré-requis suivants s'imposent à l'épreuve :

- La **loi binomial** s'effectue sur un certain nombre d'événement ou **échantillon** [noté n].

- Répondre aux exigences de l' "épreuve de **Bernoulli**"; seuls **deux issues sont possible** :

Succès [noté p] ou **Échec** [note $q = 1 - p$].

En général on donne la probabilité du Succès $P(0,4)$ et on en déduit le probabilité de l'échec $(1 - P) = 0,6$.



x_i	1 succès	0 Échec
$P(x = x_i)$	P	$q = (1 - P)$

- Les expérience doivent être **indépendantes** les unes des autres.

C'est à dire qu'à la fin de la $n - 1$ expérience, on doit toujours avoir deux issues possibles **Succès** ou **Échec**.

- pouvoir caractériser les paramètres **espérance**, **variance** et **écart type**;

L'espérance de X	$P \Rightarrow E(X) = P$
La variance de P	$P(1 - P) \Rightarrow V(X) = P(1 - P)$
L'écart type de X	$\sqrt{P(1 - P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1 - P)}$



SI les pré-requis sont validés **ALORS** nous sommes en présence d'un **loi Binomiale**.

Note $X \sim \beta(n; p)$

Avec n , l'échantillon (ensemble des événement)

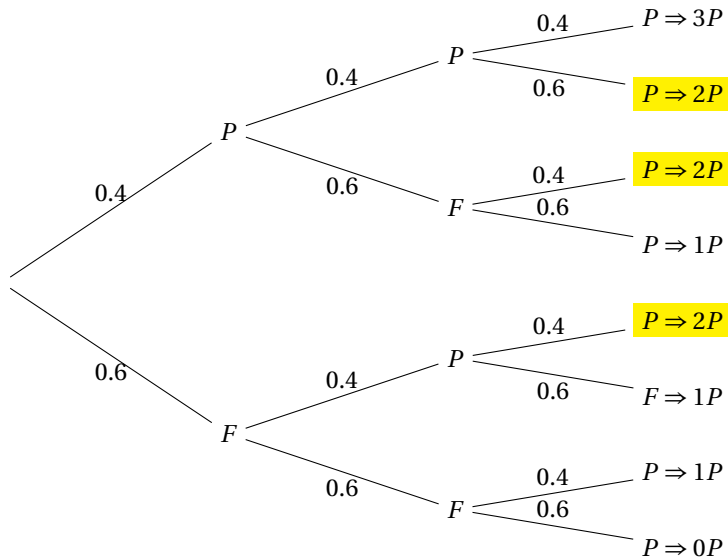
et p , pourcentage de la caractéristique étudiée (Ex. : % des produits conforme).

• L'arbre de probabilité de Bernoulli :

WP-CMS

ALORS on lance trois fois une pièce (Pile ou Face) et sachant que le pourcentage de tomber sur Face (succès) est de 40 %.

ALORS $X \sim \mathcal{B}(3; 0,4)$



Question 2 : Combien de fois je tombe sur le résultat Pile? 12 Pile.

Question 3 : Probabilité de tomber sur 2 piles?

- $0,4+0,4+0,6 = 0,096$
- $0,4+0,6+0,4 = 0,096 \Rightarrow 0,288$
- $0,6+0,4+0,4 = 0,096$

DONC SI La probabilité de tomber sur 2 piles en sachant que je lance ma pièce 3 fois et en sachant que la probabilité de tomber sur pile est de 40 %

ALORS la probabilité est de **28,8 %**.



SI l'échantillon devient très important

ALORS l'arbre de **Bernoulli** devient **inapplicable**.

DONC on applique la loi binomiale suivante :

$$P(X = k) = \mathbb{C}_n^k * P_{succes}^k * (1 - P)_{echec}^{n-k}$$

$$\text{Avec } \mathbb{C}_n^k = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

Vérification : $P(X = 2) = \mathbb{C}_3^2 * 0,4_{succes}^2 * (0,6)_{echec}^{2-1} = 0,2880$

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,05.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et l'écart-type et interpréter le résultat.
3. Donner la valeur arrondie à 10^{-4} de :
 - a) la probabilité qu'aucune personne du groupe ne fasse sonner le portique ;
 - b) la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - c) la probabilité qu'au maximum 2 personnes fassent sonner le portique.
 - d) la probabilité qu'au moins 2 personnes fassent sonner le portique.
4. Déterminer l'échantillon n pour que la probabilité des personnes qui ne font pas sonner le portique s'élève à 1%.

2.2.1 Justifier l'emploi de la loi binomiale

- Nous sommes en présence de n événements indépendants.
- Chaque événement aboutit à 2 issues (succès ou échec). Avec une **probabilité** p du succès ou de l'échec.
- **DONC nous sommes en présence d'une loi binomiale.** Elle se note : $X \sim \beta(n; p)$.

2.2.2 Calculer l'espérance mathématique (moyenne), la variance et l'écart type

- Espérance (Moyenne) $E(X) = n * p$
- Écart type $\sigma(X) = \sqrt{n * p * q}$ avec $q = 1 - p$

Traduire des expressions par un signe et **Rappel la probabilité max est 1.**

2.2.3 Calculer la probabilité de tomber sur exactement 3 événements

On note $P(X=3) \Rightarrow \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$. Ici $k=3$ et $q=1-p$

2.2.4 Calculer la probabilité de tomber sur au moins 3 événements

On note $P(X \geq 3) \Leftrightarrow 1 - P(X < 3)$ Dans le second cas les calculs seront plus rapide (restreint).

P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)	P(X=5)	P(X=6)	P(X=7)	P(X=8)	P(X=n)	
										$P(X \geq 3)$
										$1 - P(X \geq 3)$

Puis on calcul $1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

2.2.5 Calculer la probabilité de tomber sur au plus 3 événements

On note $P(X \leq 3)$

Puis on calcul $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

2.2.6 Calculer la probabilité de tomber entre deux valeurs sur les 3 événements

On note $P(3 \leq X \leq 5)$

Puis on calcul $P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

2.2.7 Déterminer les paramètres n ou p

Cas de échantillon n :

Quel échantillons choisir pour arriver à une probabilité de 0,1 qui correspond à $X=0$ [Aucun défaut].

$P(X=0) = 0,1$ Sachant que nous sommes en présence d'une loi binomiale : $X \sim \beta(30; 0,05)$

$P(X=0) = \binom{n}{0} * 0,05^0 * 0,95^n = 0,1$ ici $k=0$ et $q=1-0,05$

$\Rightarrow 1 * 1 * 0,95^n = 0,1$

$0,95^n = 0,1 \Rightarrow \ln 0,95^n = \ln 0,1 \Rightarrow n \ln 0,95 = \ln 0,1 \Rightarrow n = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} = 44 \text{ ou } 45 \Rightarrow n = \frac{\ln p}{\ln q} \quad X \sim \beta(44; 0,1)$

Chapitre 3

La Loi normale

3.1. LOI BINOMIALE VERS LOI NORMALE : POURQUOI?



Loi BINOMIALE

- $X \in \mathbb{N}$, c'est une valeur **discrète**. C'est à dire $[X = 0, 1, 2, \dots, n]$

•

- On note $X \sim \beta(n; p)$ et la formule $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k * P_{succes}^k * (1 - P)_{echec}^{n-k}$ avec n , échantillon, p la probabilité du succès, $q=1-p$ l'échec et K .

Rappel importants :

SI on écrit $P(X = 3)$, la valeur est unique (discrète)

SI on écrit $P(X < 3)$, la valeur n'est pas unique (continue) dans l'intervalle $[0; 5[$

MAIS $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ n restant petit cela revient à sommer des valeurs discrètes.



Loi NORMALE

- $X \in \mathbb{R}$, c'est une valeur **continue**. C'est à dire d'intervalle $x < 5 \Leftrightarrow [0; 5[$

•

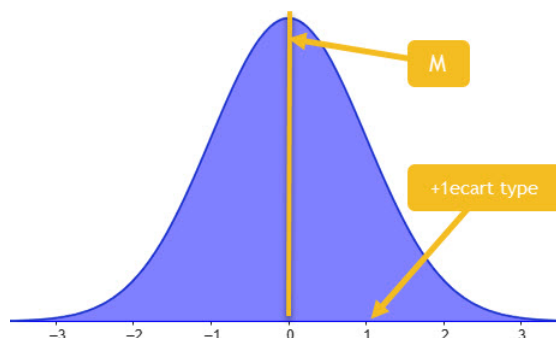
- On note $\bar{X} \sim \eta(m, \sigma)$ et la formule $T = \frac{X - m}{\sigma}$ et $T \sim \eta(0, 1)$ avec m , la moyenne et σ , l'écart type



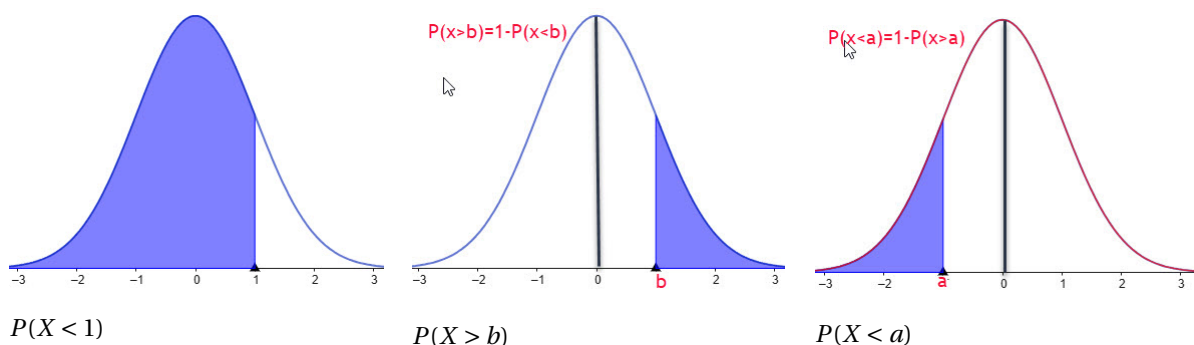
POURQUOI

SI l'échantillon $[n]$ devient trop grand

ALORS les calculs successif de $P(X = 0, 1, 2, \dots, n)$ deviennent trop important.



- La loi NORMAL est représentée par la courbe de GAUSS qui est symétrique.
- Cette courbe est centrée en m , la moyenne.
- La partie gauche de la courbe est $P(X < m)$ et la partie de droite est $P(X > m)$
- Comme la courbe est symétrique $P(X < m) = P(X > m)$



- La probabilité de la partie bleue $P(\text{Bleu} = 1)$
- Pour calculer la probabilité de $P(X < 1) \Rightarrow 1 - \text{La partie blanche}$
- Pour calculer la probabilité de $P(X > b) \Rightarrow 1 - P(X < b)$, la partie blanche
- Pour calculer la probabilité de $P(X < a) \Rightarrow 1 - P(X > a)$, la partie blanche
- Pour calculer la probabilité de $P(a < X < b) \Rightarrow 1 - P(X < a) - P(X > b)$
- Pour calculer la probabilité de $P(m < X < b) \Rightarrow 0,5 - P(X > b)$

Dans la loi Normal : $\Rightarrow P(X = a) = 0$

$\Rightarrow P(X \leq 50) \Rightarrow P(x = 50) + P(X < 50) \Rightarrow P(X < 50)$ et $P(X \geq 50) \Rightarrow P(x = 50) + P(X > 50) \Rightarrow P(X > 50)$

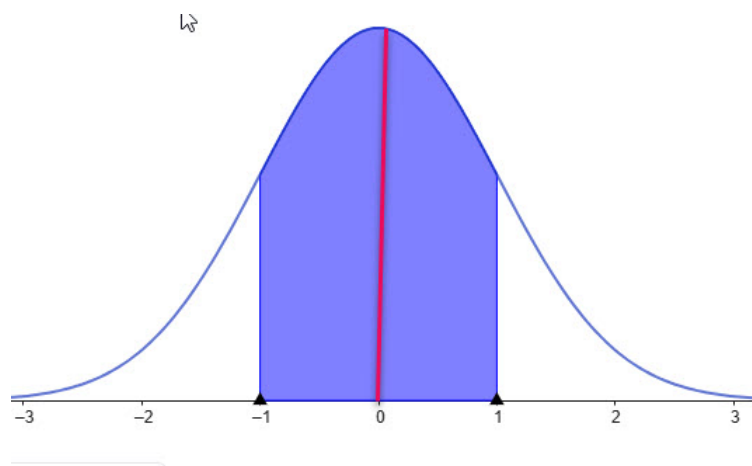


Loi BINOMIALE

- m , la moyenne change d'un exercice à un autre. Il ya donc autant de courbe de GAUSS que de moyenne.
- Pour corriger cela, GAUSS à inventer la loi centrée réduite

$$\Gamma \hookrightarrow \eta(m, \sigma)$$

avec m , la moyenne et σ , l'écart type Ici $m = 0$ et $\sigma = 1$



- $P(X < 0) = P(X > 0) = 0,5$
- $P(X < -1) = P(X > 1) \Leftrightarrow 0,5 - P(0 < X < 1)$

3.3.1 Présentation de la table de la loi normale centrée réduite

- Première Ligne verticale : 0 | 0,00 |...| 0,09
- Première Ligne horizontale : 0 | 0,1 | 0,2 | ... | 4
- Le corps de la table l'ensemble des nombre sont inférieure à 1
- 0,79389 représente la probabilité de $P(X < 0,82)$

$$\pi(0,82) = 0,79389$$

X+	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314

3.3.2 Utilisation de la loi centrée réduite

- $X \curvearrowright \eta(m, \sigma)$ avec m , la moyenne et σ , l'écart type

Exemple : On est en présence d'une loi normale $X \curvearrowright \eta(120; 20)$

- $\Gamma \curvearrowright \eta\left(\frac{X - m}{\sigma}\right)$

Exemple : Calculer la probabilité de $P(X < 100) \Rightarrow P(X < \frac{100 - 120}{20}) \Rightarrow P(X < -1) = 1 - P(X < 1) \Rightarrow$

- On note $P(X < a)$, pour probabilité et $\pi(a)$, pour lire a dans la table.

3.3.3 THÉORÈMES

Ces théorèmes permettent d'adapter la table de la loi normale réduite a tout les cas de figure.



Théorèmes

SI $0 < a < 4$ $P(x < a) = \pi(a)$ Lecture directe de la table

SI $a > 4$ la probabilité est toujours égale à 1

SI $a < 0$, on applique les théorèmes suivants :

- $P(x < -a) = 1 - P(x < a) = 1 - \pi(a)$
- $P(x > a) = 1 - P(x < a) = 1 - \pi(a)$
- $P(x > -a) = \pi(a)$
- $P(a < x < b) \Rightarrow P(x < b) - P(x < a) = \pi(b) - \pi(a)$
- $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$

Chapitre 4

Loi Binomiale et loi normale

Ce chapitre fait référence à des acquis synthétisés dans le fichier Excel : Cours statistique descriptive.



Loi BINOMIALE

- $X \in \mathbb{N}$, c'est une valeur **discrète**. C'est à dire $[X = 0, 1, 2, \dots, n]$

•

- On note $X \sim \beta(n; p)$ et la formule $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k * P_{succes}^k * (1 - P)_{echec}^{n-k}$ avec n , échantillon, p la probabilité du succès, $q=1-p$ l'échec et $\mathbb{K}$.

Rappel importants :

SI on écrit $P(X = 3)$, la valeur est unique (discrète)

SI on écrit $P(X < 3)$, la valeur n'est pas unique (continue) dans l'intervalle $[0; 5[$

MAIS $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ n restant petit cela revient à sommer des valeurs discrètes.



Loi NORMALE

- $X \in \mathbb{R}$, c'est une valeur **continue**. C'est à dire d'intervalle $x < 5 \Leftrightarrow [0; 5[$

•

- On note $\bar{X} \sim \eta(m, \sigma)$ et la formule $T = \frac{X - m}{\sigma}$ et $T \sim \eta(0, 1)$ avec m , la moyenne et σ , l'écart type



POURQUOI

SI l'échantillon $[n]$ devient trop grand

ALORS les calculs successifs de $P(X = 0, 1, 2, \dots, n)$ deviennent trop important.