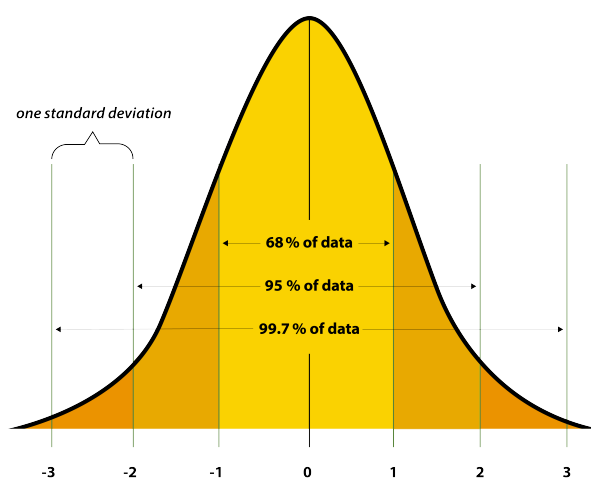




Mathématiques

LES PROBABILITÉS

Exercices

Version 1.1.0

→ *Document de référence*

Table des matières

1	Dénombrement	4
1.1	Exemples	4
1.2	ARRANGEMENTS	4
1.2.1	Exemple 1	4
1.2.2	Exemple 2	5
1.2.3	Exemple 3	5
1.3	PERMUTATIONS, ANAGRAMMES...	6
1.3.1	Exemple 1	6
1.3.2	Exemple 2	6
1.3.3	Exemple 3	7
1.3.4	Exemple 4	7
1.4	P-LISTES ou P-UPLETS	7
1.4.1	Exemple 1	7
1.4.2	Exemple 2	8
1.4.3	Exemple 3	8
1.5	COMBINAISONS	9
1.5.1	Exemple 1	9
1.5.2	Exemple 2	9
1.6	Exemple 3	9
1.6.1	Exemple 4	10
1.6.2	Exemple 5	10
1.7	PROBABILITÉS : Apprendre à DÉNOMBRE	11
2	Loi binomiale	12
2.1	Exemple : Qualité dans une fromagerie	12
2.2	Exemple : Sujet d'examen 2023	14
3	La Loi normale	15
3.1	Exercice 1 : Lecture directe de la table	15
3.2	Exercice 2 : Lecture inversée de la table	15
3.3	Exercices 3	16
3.4	Exercices 4 : Sujet et corrigé d'examen : Lois de probabilités	17
4	Loi Binomiale et loi normale	18

4.1	Exercice 01 : Qualité fabricant de lunettes	WP-CMS . .	18
4.2	Exercice 02 : Contrôle passage au portique de sécurité		19

Chapitre 1

Dénombrement

1.1. EXEMPLES

- Cas xxxxx

Composer une code à 4(p) chiffres [0,1,...,9](n)

$\Rightarrow n^4$ **SI** 1er chiffre non nulle **ALORS** $9n^3$

- Cas de l'arrangement

En présence de 20(n) athlètes on pari sur les trois premiers [0,1,3](k) $\Rightarrow A_n^k = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$ arrivées possible

- Cas de la permutation

Le mot MATHS est composé de 5(n) lettres trouver tous les mots possibles avec les 5 lettres [0,1,3,4,5](k)

$\Rightarrow A_n^k = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$ mots possibles avec un sens ou pas.

◦ TABLEAU $\Rightarrow A_n^k = \frac{7!}{(7-7)!} = 7!$ mais il y a 2 A Alors $= \frac{7!}{2!} = 2520$ mots possibles avec un sens ou pas.

◦ ANAGRAMME $= \frac{9!}{(3! * 2!)} = 30240$

- Cas de la combinaison

Une classe est composée de 30(n) étudiants trouver le nombre de groupes de 3 [0,1,3](k)

$\Rightarrow C_n^k = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$ groupes possibles avec un sens ou pas.

1.2. ARRANGEMENTS

Les arrangements, c'est l'ordre sans répétition, ou sans remises.

1.2.1 Exemple 1

- En présence de 25(n) marathoniens on attribue trois médailles **dans l'ordre** [Or, Argent et Bronze](k).

- Ordre OUI **CAR** Or, Argent et Bronze.

- Répétitions non **CAR** Le marathonnier ne peut pas cumuler or et argent.

A l'occasion d'une compétition sportive regroupant **25 marathoniens**, on attribue une **médaille d'or, d'argent et de bronze**.

Combien y-a-t-il d'arrivées possibles ?

25	24	23	Reste 23 chances pour le bronze
1	2	3	

$$\Rightarrow A_n^k = \frac{25!}{(25-3)!} = 13800 \text{ arrivées possibles}$$

1.2.2 Exemple 2

Un joueur de tiercé souhaite parier sur **20 chevaux** durant une course hippique.

Combien de combinaisons doit-il jouer pour être sûr de gagner le tiercé (trois chevaux) dans l'ordre ?

• En présence de 20(n) chevaux combien de combinaisons pour gagner le tiercé **dans l'ordre** [0,1,3](k).

◦ Ordre OUI **CAR** Or, Argent et Bronze.

◦ Répétitions non **CAR** Le cheval qui arrive 1er ne peut pas arrivé 2ème.

20	19	18	Reste 18 chances pour la 3ème place
1	2	3	

$$\Rightarrow A_n^k = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840 \text{ arrivées possibles}$$

1.2.3 Exemple 3

Un code comportant deux lettres et cinq chiffres parmi la liste fournie ci-dessous :

- 1) Combien de codes différents peut-on former ?
- 2) Combien y-a-t-il de codes sans la lettre A et sans le chiffre 2 ?
- 3) Combien de codes comportant au moins la lettre A et le chiffre 2 ?
- 4) Combien de code comportant des lettres et des chiffres différents ?

A	B	C
1	2	3
4	5	6

• En présence de 3 lettres et 5 chiffres. ◦ Ordre

◦ Répétitions

Question 1

3	3	6	6	6	6	6	Non interdit de répéter lettres et chiffres
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 3^2 * 6^5 = 419904$ codes possibles

Question 2 Combien y a t-il de codes sans la lettre A et sans le chiffre 2?

2	2	5	5	5	5	5	Non interdit de répéter lettres et chiffres
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 2^2 * 5^5 = 12500$ codes possibles

Question 3 Combien y a t-il de codes comportant au moins la lettre A et sans le chiffre 2?

							Non interdit de répéter lettres et chiffres
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 419904 - 12500 = 407404$ codes possibles

Question 4 Combien y a t-il de codes comportant des lettres A et des chiffre différents?

3	2	6	5	4	3	2	Non interdit de répéter lettres et chiffres
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 3! * 6! = 4320$ codes possibles

1.3. PERMUTATIONS, ANAGRAMMES...

1.3.1 Exemple 1

Un groupe de 10 étudiants doivent passer un entretien pour une admission dans une école de commerce.
- Combien y'aurait-il de listes (ordres de passages) possible ?

- En présence de 1 groupe de 10 étudiants pour une admission. ◦ Ordre Oui
- Répétitions

Combien de liste?

10	9	8	...	...	2	1	
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 10! = 3628800$ listes possibles

1.3.2 Exemple 2

- En présence de 1 mot de 5 lettres. ◦ Ordre Oui
- Répétitions

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « **SPORT** » ? NP-CMS

Combien d'anagrammes possible?

5	4	3	2	1	-	-	
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow 5! = 120$ listes possibles

1.3.3 Exemple 3

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « **BUREAU** » ?

- En présence de 1 mot de 6 lettres dont 2 identiques. ◦ Ordre Oui
- Répétitions

Combien d'anagrammes possible?

6	5	4	3	2	1	-	Dont 1 lettre se répète
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow \frac{6!}{2!} = 360$ listes possibles

1.3.4 Exemple 4

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « **BUREAU** » ?

- En présence de 1 mot de 11 lettres dont 2 M identiques 3 I identiques et 2 E identiques. ◦ Ordre Oui
- Répétitions

Combien d'anagrammes possible?

6	5	4	3	2	1	-	Dont 1 lettre se répète
L	L	C	C	C	C	C	-

$\Rightarrow \frac{11!}{3! * 2! * 2!} = 1663200$ listes possibles

1.4. P-LISTES OU P-UPLETS

Liste d'éléments [p] d'un ensemble [E] ordonnée mais respecter forcément le principe de répétition.

1.4.1 Exemple 1

- En présence de 20 questions avec 5 réponses possibles. ◦ Ordre Oui
- Répétitions

Combien de façons à répondre a ce questionnaire?

Vous réalisez une étude de satisfaction auprès d'un échantillon de 1 000 personnes. Votre questionnaire est composé de **20 questions**. Chaque question propose **5 réponses possibles**.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

5	5	5	-	-	5	5	-
1	2	3	-	-	19	20	-

$\Rightarrow n^p = 5^{20} = 95367431640625$ façons de répondre

SI 1 moitié du questionnaire 5 réponses et l'autre 3 réponses.

ALORS $n^p = 5^{10} * 3^{10} = 576650390625$ façons de répondre

1.4.2 Exemple 2

Combien de numéros de téléphone à 10 chiffres peut-on former ?

• En présence de X numéros à 10 chiffres. ◦ Ordre Oui

◦ Répétitions

Combien de numéros de téléphone possible ?

10	10	10	-	-	10	10	-
1	2	3	-	-	9	10	-

$\Rightarrow n^p = 10^{10} = 10000000000$ numérotation possibles

1.4.3 Exemple 3

Combien de numéros de téléphone à 10 chiffres peut-on former en sachant que le premier numéro est un 0 et le deuxième est un 6 ou un 7 ?

• En présence de X numéros à 10 chiffres dont le premier chiffre est 0 et le second 6 ou 7. ◦ Ordre Oui

◦ Répétitions

Combien de numéros de téléphone possible ?

1	2	10	-	-	10	10	WP-CMS
1	2	3	-	-	9	10	-

$\Rightarrow 1 * 2 * n^8 = 200000000$ numérotation possibles

n , est l'ensemble et k une partie de n Dans une combinaison, il n'y a pas d'ordre ABC, c'est la même chose que ACB

1.5. COMBINAISONS

1.5.1 Exemple 1

Un joueur de tiercé souhaite parier sur **20 chevaux** durant une course hippique.
Combien de combinaisons doit-il jouer pour être sûr de gagner le **tiercé (trois chevaux) dans l'ordre ?**

• En présence de 20(n) chevaux combien de combinaisons pour gagner le tiercé **le désordre** $[0,1,3](k)$.

-	-	-	-
1	2	3	

$\Rightarrow \mathbb{C}_{20}^3 = \frac{20!}{3!(n-k)!} = 1140$ combinaisons possibles

1.5.2 Exemple 2

Dans une classe de **30 étudiants**, nous souhaitons former des **groupes de 3 étudiants** pour des exposés. Combien de combinaisons possibles peut-on former ?

• En présence de 1 groupe de 30 étudiants pour former des groupes de 3.

- Ordre Non
- Répétitions Non

Combien de liste?

$\Rightarrow$ Méthode de l'arrangement $\frac{30 * 29 * 28}{6} = 4060$ listes possibles $\Rightarrow$ Méthode de la combinaison $\mathbb{C}_{30}^3 = \frac{30!}{3! * (30-3)!} = 4060$ listes possibles

1.6. EXEMPLE 3

• En présence de 1 groupe de 10 femmes et 20 hommes nombre de façons de trouver 4 femmes et 6 homes.

- Ordre Non

De combien de façons peut-on choisir 4 femmes et 6 hommes ^{MS} parmi 10 femmes et 20 hommes ?

◦ Répétitions Non

Combien de liste?

$$C_{10}^4 * C_{20}^6 = \frac{10!}{4! * (6)!} * \frac{20!}{6! * (14)!} = xxx \text{ listes possibles}$$

1.6.1 Exemple 4

Au service du personnel, on compte **12 célibataires** parmi les **30 employés**. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un **échantillon de quatre personnes** dans ce service.

- Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
- Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
- Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?



• En présence de 1 groupe de 30 employés dont 12 célibataires. On veut un échantillon de 4 personnes

◦ Ordre Non

◦ Répétitions Non

Question 01 : Nombre d'échantillons différents possibles?

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{4! * (26)!} = 27405 \text{ listes possibles}$$

Question 02 : Nombre d'échantillons sans célibataires?

$$C_{18}^4 = \frac{18!}{4! * (14)!} = 3060 \text{ listes possibles}$$

Question 02 : Nombre d'échantillons avec au moins 1 célibataire?

Le contraire de au moins 1 célibataire , le contraire sont tous non célibataires

$$27405 - 3060 = 24346 \text{ listes possibles}$$

1.6.2 Exemple 5

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

- 1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
- 2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
 - a) uniquement des hommes ;
 - b) des personnes de même sexe ;
 - c) au moins une femme et au moins un homme

- En présence de 1 groupe de 6 personnes parmi 25 femmes et 32 hommes. On veut un échantillon de 4 personnes
 - Ordre Non
 - Répétitions Non

Question 01 : de combien de façon peut-on constituer de groupe de 6 personnes ?

$$C_{57}^6 = \frac{57!}{6! * (51)!} = 36288252 \text{ listes possibles}$$

Question 02-a : de combien de façon peut-on constituer de groupe de 6 personnes avec uniquement des hommes ?

$$C_{32}^6 = \frac{32!}{6! * (26)!} = 906192 \text{ listes possibles}$$

Question 02-b : de combien de façon peut-on constituer de groupe de 6 personnes de même sexe ?

$$C_{25}^6 + C_{32}^6 = \frac{25!}{6! * (19)!} + \frac{32!}{6! * (26)!} = 1083292 \text{ listes possibles}$$

Question 02-c : de combien de façon peut-on constituer de groupe de 6 personnes de même sexe ?

$$36288252 - 1083292 = 37204960 \text{ listes possibles}$$

1.7. PROBABILITÉS : APPRENDRE À DÉNOMBRE

A DÉVELOPPER

Chapitre 2

Loi binomiale

2.1. EXEMPLE : QUALITÉ DANS UNE FROMAGERIE

Dans une **fromagerie**, le responsable qualité prend un **échantillon** de 25 fromages.

La probabilité de tomber sur un fromage non conforme est de 7% soit 0,07.

Réponse 01 : Justifier l'emploi de la loi binomiale

- On est en présence de 25 événements indépendants car **aucune influence entre les événements**.
- Chaque événement tiré au hasard possède 2 issues : succès [fromage non conforme] ou échec [fromage conforme].
- La probabilité du succès est de $P = 0,07$ donc la probabilité de l'échec est de $q = 1 - p = 0,93$

Nous sommes donc en présence d'une loi binomiale $X \sim \beta(25; 0,07)$

Réponse 02 : Calculer l'espérance mathématique (moyenne), la variance et l'écart type

- **Espérance** : $E(X) = n * p = 25 * 0,07 \Rightarrow E(X) = 1,75$
- **Variance** : $V = 25 * 0,07 * 0,93 = 1,63 \Rightarrow V = 1,63$
- **Écart type** : $\sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{25 * 0,07 * 0,93} \Rightarrow \sigma = 1,27$

Réponse 03 : Calculer la probabilité de tomber sur exactement 2 fromages non-conforme.

- $P(X = 2) = \mathbb{C}_{25}^2 * 0,07^2 * q^{23}$ ici $k = 2$ et $q = 1 - p$
 $= \frac{25!}{2! * (25 - 2)!} * 0,07^2 * q^{23} = \frac{25 * 24}{2} * 0,07^2 * q^{23} = 0,28 \Rightarrow P(X = 2) = 0,28$
- Il ya donc **28** % de chance de tomber sur 2 fromages non conforme sur un lot de 25 fromages.

Réponse 04 : Calculer la probabilité de tomber sur au plus 2 fromages non-conforme.

- $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
 - $P(X = 0) = \mathbb{C}_{25}^0 * 0,07^0 * q^{25} \Rightarrow 0,16$
 - $P(X = 1) = \mathbb{C}_{25}^1 * 0,07^1 * q^{24} \Rightarrow 0,31 \Rightarrow P(X < 2) = 0,75$
 - $P(X = 2) \Rightarrow 0,28$
- Il ya donc **75** % de chance de tomber au maximum sur 2 fromages non conforme sur un lot de 25 fromages

Réponse 5 : Calculer la probabilité de tomber sur au moins 2 fromages non-conforme

- $P(X \geq 2) = 1 - P(x < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$

- $P(X = 0) = \mathbb{C}_{25}^0 * 0,07^0 * q^{25} \Rightarrow 0,16$

- $P(X = 1) = \mathbb{C}_{25}^1 * 0,07^1 * q^{24} \Rightarrow 0,31$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - (0,16 + 0,31) \quad P(X \geq 2) = 0,53$$

- Il ya donc **53 %** de chance de tomber sur au moins 2 fromages non conforme sur un lot de 25 fromages

Réponse 6 : Calculer la probabilité de tomber entre deux valeurs 2 fromages non conforme

- $P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

- $P(X = 3) = \mathbb{C}_{25}^3 * 0,07^3 * q^{22} \Rightarrow A$

- $P(X = 4) = \mathbb{C}_{25}^4 * 0,07^4 * q^{21} \Rightarrow B$

- $P(X = 5) = \mathbb{C}_{25}^5 * 0,07^5 * q^{20} \Rightarrow C$

$$\Rightarrow P(3 \leq X \leq 5) = 0,25$$

- Il ya donc **25 %** de chance de tomber sur au moins 2 fromages non conforme sur un lot de 25 fromages

Réponse 7 Déterminer un nouvel échantillon

- La probabilité de tomber sur aucun fromage non conforme.

Autrement dit : nous voulons arriver à une probabilité de 0,1 qui correspond a aucun fromage défectueux.

Déterminer l'échantillon à étudier?

- Posons la probabilité $P(X = 0) = 0,1$

- Déterminer l'échantillon : $\mathbb{C}_n^0 * 0,07^0 * q^n = 0,1$

- $1 * 1 * 0,93^n = 0,1$

- $\ln 0,93^n = \ln 0,1$

$$\Rightarrow n = 31 \text{ ou } 32$$

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,05.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et l'écart-type et interpréter le résultat.
3. Donner la valeur arrondie à 10^{-4} de :
 - a) la probabilité qu'aucune personne du groupe ne fasse sonner le portique ;
 - b) la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - c) la probabilité qu'au maximum 2 personnes fassent sonner le portique.
 - d) la probabilité qu'au moins 2 personnes fassent sonner le portique.
4. Déterminer l'échantillon n pour que la probabilité des personnes qui ne font pas sonner le portique s'élève à 1%.

A DÉVELOPPER

Chapitre 3

La Loi normale

3.1. EXERCICE 1 : LECTURE DIRECTE DE LA TABLE

Exemple 1-1 : $P(x < 3,1) \Rightarrow \pi(3,10)$ Résultat des intersections Ligne 3,1 $\cap$ Colonne 0,00 = 0,9990

Exemple 1-2 : $P(x < -2,7) \Rightarrow 1 - \pi(2,70)$ Résultat des intersections $1 - 0,99653 = 0,00347$

Exemple 1-3 : $P(x > 2,20) \Rightarrow 1 - \pi(2,20)$ Résultat des intersections $1 - 0,98610 = 0,0139$

Exemple 1-4 : $P(x > -1,50) \Rightarrow \pi(1,50)$ Résultat des intersections = 0,93319

3.2. EXERCICE 2 : LECTURE INVERSÉE DE LA TABLE

Exemple 2-1 $P(x < a) = 0,99$

$A = 0,98983 <$	$P_x = 0,99$	$< B = 0,99010$
$C = 2,32$	$(x) = a$	$D = 2,33$

On recherche dans la table A et $B \Rightarrow$ On déduit avec les intersections C et D $2,32 < a < 2,33$ sur la table

Équation de l'interpolation linéaire $\frac{x-C}{D-C} = \frac{P_x-A}{B-A} \Rightarrow X = C + \left(\frac{(D-C)(P_x-A)}{(B-A)} \right) \Rightarrow X = 2,326$

Exemple 2-2 $P(x > a) = 0,05 \Rightarrow$ N'est pas sur la table, on pose donc $P(x < a) = 1 - 0,05 = 0,95$

$A = 0,94950 <$	$P_x = 0,95$	$< B = 0,95053$
$C = 1,64$	$(x) = a$	$D = 1,65$

On recherche dans la table A et $B \Rightarrow$ On déduit avec les intersections C et D $1,64 < a < 1,65$ sur la table

Équation de l'interpolation linéaire $\frac{x-C}{D-C} = \frac{P_x-A}{B-A} \Rightarrow X = C + \left(\frac{(D-C)(P_x-A)}{(B-A)} \right) \Rightarrow X = 1,645$

Exemple 2-3 $P(x < a) = 0,1 \Rightarrow$ N'est pas sur la table, on pose donc $P(x < -a) = 1 - 0,1 = 0,90$ WP-CMS

$A = 0,89973 <$	$P_x = 0,9$	$< B = 0,90147$
$C = 1,28$	$(x) = a$	$D = 1,29$

On recherche dans la table A et $B \Rightarrow$ On déduit avec les intersections C et D $1,28 < a < 1,29$ sur la table

Équation de l'interpolation linéaire $\frac{x-C}{D-C} = \frac{P_x-A}{B-A} \Rightarrow X = C + \left(\frac{(D-C)(P_x-A)}{(B-A)} \right) \Rightarrow X = 1,282$ donc $-a = -1,282$

Vérification : $P(X < -1,282) \Rightarrow 1 - \pi(1,282) \Rightarrow 1 - 0,99 \Rightarrow 0,1$

3.3. EXERCICES 3

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.

• Énoncé de l'exercice

• Les données

$m = 0,3$, la moyenne et $\sigma = 0,1$, l'écart type $\Rightarrow T = \frac{\bar{X} - m}{\sigma}$

- $P(x < 0,36)$ mm

- $P(0,25 < x < 0,35)$

Question 01 : $P(x < 0,36)$ mm

$P(T < \frac{0,36-0,3}{0,1}) = P(x < 0,6) \Rightarrow \pi(0,60)$ On recherche sur la table de la loi normale : $x = 0,72575$

Question 02 : $P(0,25 < x < 0,35)$

$P(T < \frac{0,25-0,3}{0,1}) < T < \frac{0,35-0,3}{0,1} \Rightarrow P(-0,5 < T < +0,5)$ ou $P(-a < T < +a)$

Appliquons le théorème : $2\pi(a) - 1 \Rightarrow (2 * 0,69141) - 1$ $x = 0,38292$

3.4. EXERCICES 4 : SUJET ET CORRIGÉ D'EXAMEN : LOIS DE PROBABILITÉS

WP-CMS

Un éleveur de vaches laitières transforme une grande partie de ce lait pour en fabriquer du fromage type Camembert qu'il commercialise à l'unité. Il vous demande de lui calculer le chiffre d'affaires prévisionnel de ses fromages produits à la ferme.

En effet, l'éleveur produit trois catégories de camembert. Les catégories sont définies par leur poids.

- Catégorie 1 : poids $< 300\text{g}$
- Catégorie 2 : poids compris entre 300g et 350g
- Catégorie 4 : poids $> 350\text{g}$

Des études statistiques ont montré que le poids des fromages type « camembert » fabriqués par cet éleveur suit une loi normale de moyenne 0.320 kg pour un écart-type de 25g .

- a) Calculer la probabilité de la catégorie 1
- b) Calculer la probabilité de la catégorie 2
- c) Calculer la probabilité de la catégorie 3

L'éleveur reçoit une commande de $5\,000$ camemberts. La catégorie 1 est commercialisée à $2,50\text{€}$, la catégorie 2 à $3,20\text{€}$ et la catégorie 3 à $4,50\text{€}$.

- d) Calculez le montant de cette commande.

• Solution de l'exercice en cours

A DÉVELOPPER

Loi binomiale repose sur des valeurs discrètes [$p(x)=\text{toto}$] mais si on a $p(x < 3)$ on doit appliquer la formule trois fois donc 3 valeurs discrètes. donc pour $p(x < 100)$ c'est très long.

La loi normale comble les lacunes de la loi binomiale et repose sur des valeurs continues (intervalle)

En loi normale on est pas sur des valeurs discrètes donc $P(X = a) = 0$ et $< \leq = >$

Chapitre 4

Loi Binomiale et loi normale

4.1. EXERCICE 01 : QUALITÉ FABRIQUANT DE LUNETTES

On dit que 30 % des lunettes sont défectueuses. On prélève alors un échantillon n de 100 lunettes.

$$X \sim \beta(100; 0,3)$$

- Calculer $P(X = 35)$ On applique la formule $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k * P_{succes}^k * (1 - P)_{echec}^{n-k}$
- Calculer $P(X \leq 35) \Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 35)$. Trop long.
- Calculer $P(X \geq 35) \Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 35)$. Trop long.

★★ Pour pouvoir approcher une loi binomiale par une loi normale, il faut respecter les **conditions** suivantes :

- $n \geq p \Rightarrow n = 100$ donc ≥ 30
- $n * p \geq 5 \Rightarrow np = 100 * 0,3 = 30$ donc ≥ 5
- $n * q \geq 5 \Rightarrow np = 100 * 0,7 = 70$ donc ≥ 5

★★ Les conditions sont remplies, on peut donc **approcher** $X \sim \beta(100; 0,3)$ **par la loi normale** $\tilde{X} \sim \eta(E(X), \sigma)$.

★★ Calculons les paramètres

- $E(X) = n * p = 30 \Rightarrow E(X) = 30$
- $\sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{100 * 0,3 * 0,7} = 4,6 \Rightarrow \sigma = 4,6$

$$X \sim \eta(30; 4,6\sigma)$$

★★ Calculons maintenant la question de la loi binomiale par la méthode de la loi normale.

- Calculer $P(X = 35)$

$P(X = 35) = 0$ selon la loi normale. Donc il faut transformer en intervalle $34,5 \leq X \leq 35,5$

Pour utiliser la table de la loi centrée réduite

En premier, appliquons le théorème $34,5 \leq X \leq 35,5 \Rightarrow P(X < 35,5) - P(X < 34,5)$

En second, applique la formule de la loi centrée réduite $T = \frac{X - m}{\sigma}$

$$P(X < \frac{35,5 - 30}{4,6}) - P(X < \frac{34,5 - 30}{4,6})$$

$$P(X < 1,19) - P(X < 0,98) \Rightarrow \pi(1,19) - \pi(0,98)$$

En troisième, lecture directe sur la table $0,8830 - 0,8365 = 0,0465$

Il y a 4,65 % de chance de trouver a peu près 35 lunettes non conforme.

WP-CMS

- Calculer $P(X \leq 35)$

Pour appliquer la loi normal, afin de préserver le 35 on modifie l'intervalle $P(X < 35)$

$$\Rightarrow P(X < \frac{35,5 - 30}{4,6}) \Rightarrow P(X < 1,19) \Rightarrow \pi(1,19) \Rightarrow 0,8830$$

Il y a 88,8 % de chance de trouver a peu près au maximum 35 lunettes non conforme.

- Calculer $P(X \geq 35)$

Pour appliquer la loi normal, afin de préserver le 35 on modifie l'intervalle $P(X > 34,5)$

Et on fait appel aux théorème pour lire la table $1 - P(X > 34,5)$

$$\Rightarrow 1 - P(X < \frac{34,5 - 30}{4,6}) \Rightarrow 1 - P(X < 0,98) \Rightarrow 1 - \pi(0,98) \Rightarrow 0,1635$$

Il y a 16,35 % de chance de trouver a peu près au moins 35 lunettes non conforme.

4.2. EXERCICE 02 : CONTRÔLE PASSAGE AU PORTIQUE DE SÉCURITÉ

Deuxième partie : LOI BINOMIALE

60 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,07. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 60 personnes de ce groupe.

- 1) Donner la valeur arrondie à 10^{-4} de :
 - a) la probabilité qu'aucune personne du groupe ne fasse sonner le portique ;
 - b) la probabilité qu'au moins deux personnes du groupe fasse sonner le portique ;
 - c) la probabilité qu'au maximum 2 personnes fassent sonner le portique.
- 2) Déterminer l'échantillon n pour que la probabilité des personnes qui ne font pas sonner le portique s'élève à 10%.