

WP-CMS

Mathématiques financières

Statistiques inférentielles

Cours

Version 1.1.0

- *Document de référence*
- *Package TIKZ*
- *Package Spreadtab*

Table des matières

1	Les pré-requis	3
1.1	Statistiques descriptives	3
1.2	Les probabilités	3
2	L'Échantillonnage	5
2.1	Échantillonnage par la moyenne	6
2.2	Échantillonnage par la proportion	6
3	L'Estimations	7
3.1	Estimation ponctuelle	8
3.2	Intervalle de confiance	9
3.2.1	Estimation par la moyenne Écart type connu	9
3.2.2	Estimation par la moyenne Écart type inconnu	10
3.2.3	Estimation par la proportion	11

Chapitre 1

Les pré-requis

1.1. STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Paramètres	Formules		Notes
Moyenne	$\bar{X} = \frac{\sum (n_i * \mathcal{C}_i)}{N}$	$E(X = n * p)$	avec $\mathcal{C}_i$, le centre des intervalles.
Variance	$\mathcal{V} = \frac{\sum n_i * (\mathcal{C}_i - \bar{X})^2}{N}$	$V(X) = n * p * q$	-
Écart type	$\sigma = \sqrt{\mathcal{V}}$	$\sigma = \sqrt{n * p * q}$	

SI l'écart type s'éloigne de la moyenne ALORS distribution est **hétérogène**

1.2. LES PROBABILITÉS



Loi BINOMIALE

SI les pré-requis sont validés ALORS nous sommes en présence d'un **loi Binomiale**.

On note $X \sim \beta(n; p)$. Avec $X \in \mathbb{N}$, valeur **discrète**. C'est à dire $[X = 0, 1, 2, \dots, n]$

Formule : $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k * P_{succes}^k * (1 - P)_{echec}^{n-k}$ Avec $\mathbb{C}_n^k = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$

Avec n, échantillon, p la probabilité du succès, q=1-p l'échec et K

SI l'échantillon [n] devient trop grand

ALORS les calculs successifs de $P(X = 0, 1, 2, \dots, n)$ deviennent trop importants.



Loi NORMALE

• $X \in \mathbb{R}$, c'est une valeur **continue**. C'est à dire d'intervalle $x < 5 \Leftrightarrow [0; 5[$

• Loi Normale : $\bar{X} \sim \eta(m, \sigma)$ avec m, la moyenne et σ , l'écart type

Il ya autant de courbe de GAUSS que de moyenne. Pour corriger cela, GAUSS à inventer

• la loi centrée réduite $T = \frac{X - m}{\sigma}$ et $T \sim \eta(0, 1)$ avec $m = 0$, la moyenne et $\sigma = 1$, l'écart type

• On cherche ensuite la valeur de T dans la table de la loi normale.

- Ligne verticale : 0 | 0,00 | ... | 0,09 et Ligne horizontale : 0 | 0,1 | 0,2 | ... | 4
- Le corps de la table l'ensemble des nombre sont inférieure à 1
- 0,79389 représente la probabilité de $P(X < 0,82)$. On note $\pi(0,82) = 0,79389$

$X +$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314

Utilisation de la loi centrée réduite

- $X \sim \eta(m, \sigma)$ avec m , la moyenne et σ , l'écart type

Exemple : On est en présence d'une loi normale $X \sim \eta(120; 20)$

- $Z \sim \eta\left(\frac{X - m}{\sigma}\right)$

Exemple : Calculer la probabilité de $P(X < 100) \Rightarrow P\left(X < \frac{100 - 120}{20}\right) \Rightarrow P(X < -1) = 1 - P(X < 1) \Rightarrow$

- On note $P(X < a)$, pour probabilité et $\pi(a)$, pour lire a dans la table.

THÉORÈMES

Ces théorèmes permettent d'adapter la table de la loi normale réduite a tout les cas de figure.



Théorèmes

SI $0 < a < 4$ $P(x < a) = \pi(a)$ Lecture directe de la table. SI $a > 4$ P est toujours égale à 1

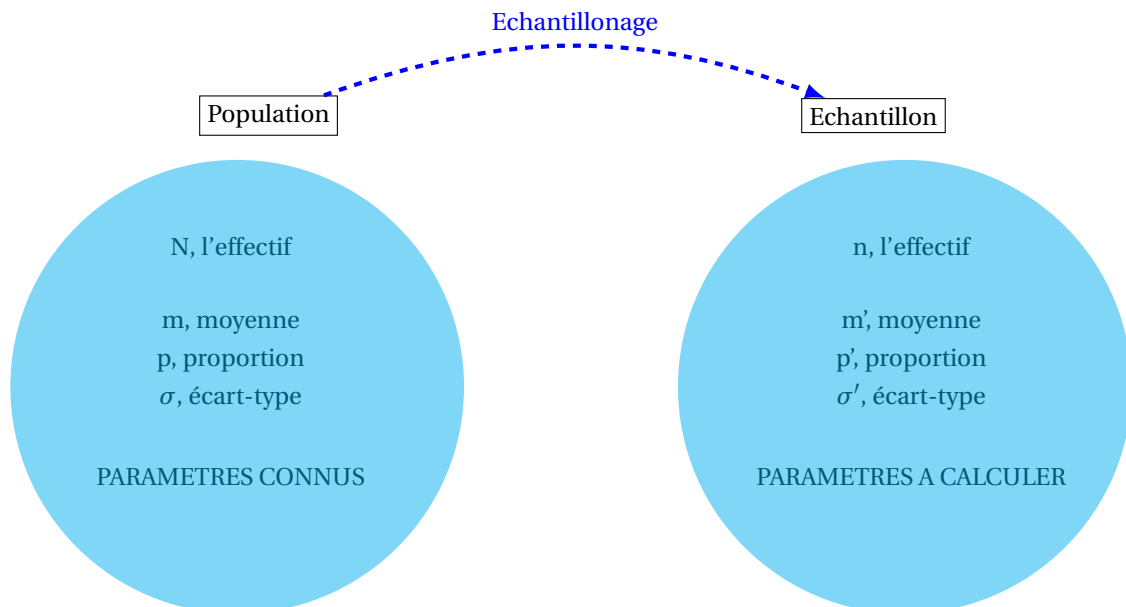
SI $a < 0$, on applique les théorèmes suivants :

- $P(x > a) = 1 - P(x < a) = 1 - \pi(a)$
- $P(x < -a) = 1 - P(x < a) = 1 - \pi(a)$
- $P(x > -a) = \pi(a)$
- $P(a < x < b) \Rightarrow P(x < b) - P(x < a) = \pi(b) - \pi(a)$
- $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$ On l'applique systématiquement avec les seuils de confiance.

Chapitre 2

L Échantillonnage

D'une **population** mère (France, Régions ...) on constitue un **échantillon**.



En tenant compte des paramètres fournis, deux scénarios se dessinent :

- Échantillonnage par la **moyenne** [m , m'],
- Échantillonnage par la **proportion** [p , p'].

Notes importantes :

- Les éléments doivent être : pris au hasard et **avec remise!**.
- **SI** l'échantillon est réalisé de manière **non exhaustivité (sans remise)**

ALORS on applique une correction de σ' en le multipliant par le coefficient d'exhaustivité $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

- **SI** On ne précise pas que nous sommes en présence d'une loi normale

ALORS $n \geq 30$, $np \geq 5$, $nq \geq 5$ et $n * p * q \geq 5$

2.1. ÉCHANTILLONNAGE PAR LA MOYENNE

WP-CMS

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	49	n
m	40	Moyenne	0	m'
p	0	Proportion	0	p'
σ	4	Écart type	0	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$m' = m \Rightarrow m' = 40$	$\sigma'_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma'_m = \frac{4}{7} = 0.57143$	$\bar{X} \sim \eta(40; 0.57143)$
------------------------------	---	----------------------------------

- On définit les éléments de la loi F (centré réduite).

$\frac{\bar{X} - m'}{\sigma'_m}$	$\Rightarrow \frac{\bar{X} - 40}{0.57143}$	-
----------------------------------	--	---

- Calculer la probabilité que sur un échantillon, la fréquence des produits Non-Conforme < 39 %.

$P(\bar{X} < 0.39)$	$P\left(\frac{\bar{X} - 40}{0.57143} < \frac{39 - 40}{0.57143}\right)$ avec $T = \frac{\bar{X} - 40}{0.57143}$	$P(T < -1.75)$	0,95994
---------------------	--	----------------	---------

★ Au regard de l'expression on applique un théorème : Ici $P(T < -a) = 1 - \pi(a)$.

★ $(F < 0.39) = 1 - 0,95994 = 0.04005$

- Il ya donc 4 % de chance de tomber sur un produit non-conforme dont la fréquence est < 39 %

2.2. ÉCHANTILLONNAGE PAR LA PROPORTION

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	60	n
m	0	Moyenne	0	m'
p	0.1	Proportion	0	p'
σ	4	Écart type	0	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$p' = p \Rightarrow p' = 0.1$	$\sigma'_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sigma'_p = 0.03867$	$\bar{X} \sim \eta(0.1; 0.03867)$
-------------------------------	--	-----------------------------------

- On définit les éléments de la loi F (centré réduite).

$\frac{F - p'}{\sigma'_p}$	$\Rightarrow \frac{F - 0.1}{0.03867}$	-
----------------------------	---------------------------------------	---

- Calculer la probabilité que sur un échantillon, la fréquence des produits Non-Conforme < 9 %.

$P(F < 0.09)$	$P\left(\frac{F - 0.1}{0.03867} < \frac{0.09 - 0.1}{0.03867}\right)$ avec $T = \frac{F - 0.1}{0.03867}$	$P(T < -0.26)$	0,60257
---------------	---	----------------	---------

★ Au regard de l'expression on applique un théorème : Ici $P(x < -a) = 1 - \pi(a)$

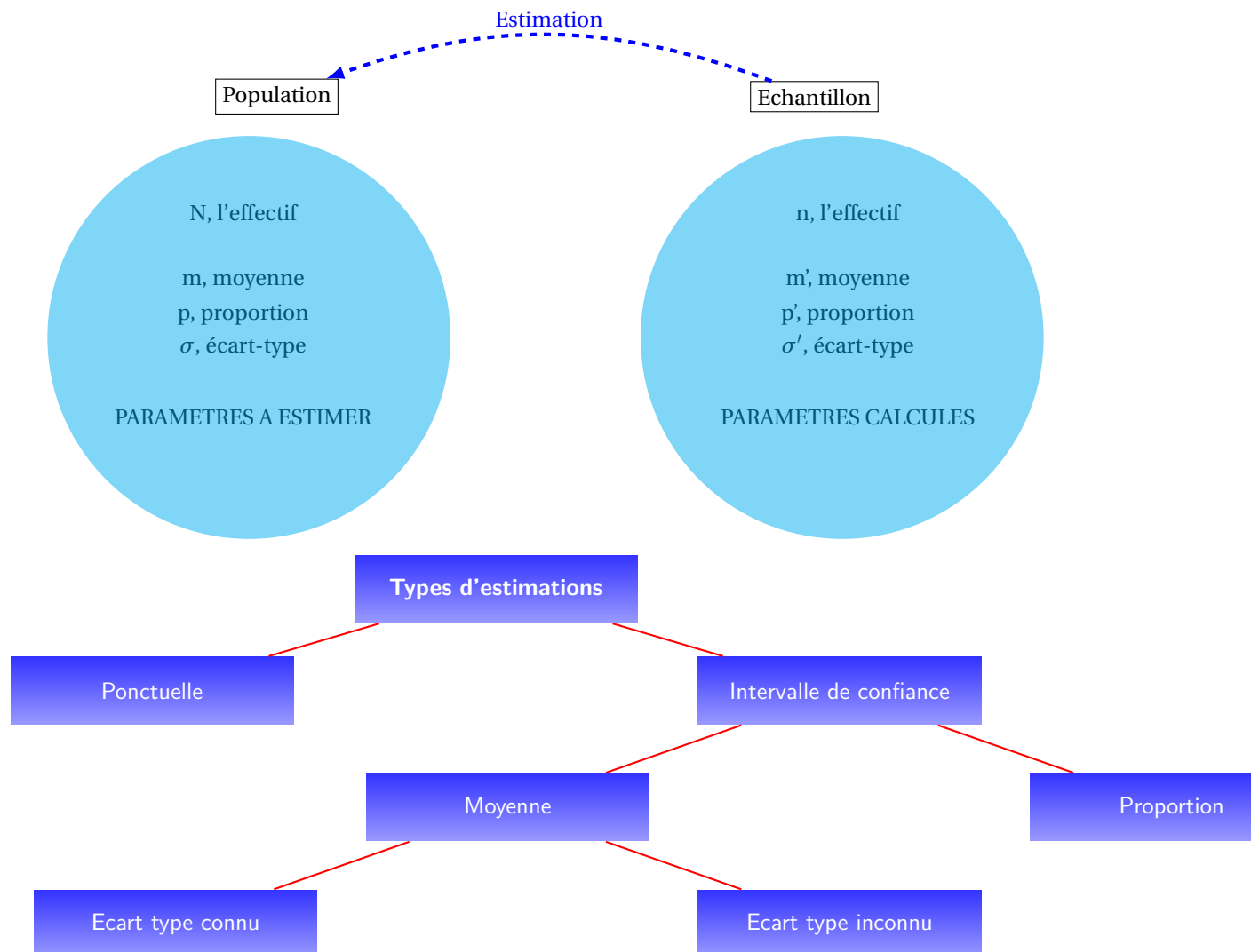
★ $(F < 0.09) = 1 - 0,60257 = 0.39743$

- Il ya donc 40 % de chance de tomber sur un produit non-conforme dont la fréquence est < 9 %

Chapitre 3

L' Estimations

On choisi un **échantillon représentatif** de la population pour **estimer** le résultat de la **population**.



3.1. ESTIMATION PONCTUELLE

WP-CMS

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	150	n
m	0	Moyenne	0	m'
p	0	Proportion	0.3	p'
σ	0	Écart type	0	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$p' = p \Rightarrow p' = \frac{45}{150} = 0.3$	$\sigma'_m = \sqrt{\frac{p * q}{n}} \Rightarrow \sigma'_m = 0.037$	$Sc = 0.95 \Rightarrow 95 \%$
--	--	-------------------------------

- On définit la loi normal.

$F \sim \eta(p, \sigma)$	$F \sim \eta(0.3, 0.037)$	-
--------------------------	---------------------------	---

- On définit la loi centrée réduite .

$\frac{F - p'}{\sigma'}$	$\frac{F - 0.3}{0.037} \sim (0, 1)$	-
--------------------------	-------------------------------------	---

- On définit l'intervalle de confiance.

$\left[P - t * \sqrt{\frac{p * q}{n}}; P + t * \sqrt{\frac{p * q}{n}} \right]$	$\left[P - t * \sigma'_p; P + t * \sigma'_p \right]$	-
---	---	---

- On pose la formule.

$2\pi(t) - 1 = Sc$	$\pi(t) = \frac{1 + Sc}{2} = 0.975$	Lecture inversée table $t = 1,96$
--------------------	-------------------------------------	-----------------------------------

- On calcul l'intervalle de confiance.

$P(0.3 - 1,96 * 0.037; 0.3 + 1,96 * 0.037)$	$[22.7; 37.3]$	
---	----------------	--

Au seuil de confiance 95 % la proportion est comprise entre 22.7 % et 37.3 %.

3.2.1 Estimation par la moyenne Écart type connu

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	100	n
m	0	Moyenne	12	m'
p	0	Proportion	0	p'
σ	0.15	Écart type	0	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$m' = m \Rightarrow m = 12$	$\sigma'_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma'_m = \frac{0.15}{\sqrt{100}} = 0.015$	$Sc = 0.95 \Rightarrow 95 \%$
-----------------------------	---	-------------------------------

- On définit les paramètres de l'intervalle de confiance.

$\left[m - t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$	$[m - t * \sigma'; m + t * \sigma']$	Ici $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
---	--------------------------------------	---

- Calculer le paramètre t pour un seuil de confiance de 0.95.

Poser la formule $2\pi(t) - 1 = Sc$	$\pi(t) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.97499$	Lecture inversée table $t = 1,96$
-------------------------------------	---	-----------------------------------

- Calculer l'intervalle de confiance.

$[12 - 1,96 * 0.015; 12 + 1,96 * 0.015]$	$[10.04; 13.96]$	-
--	------------------	---

Au seuil de confiance de 95 %, l'intervalle de confiance de la moyenne est comprise entre 10.04 et 13.96.

- On pose la probabilité.

$P(m - \epsilon < \bar{X} < m + \epsilon = Sc)$	$P(12 - 0.03 < \bar{X} < 12 + 0.03 = Sc)$	$Sc = 0.99 \Rightarrow 99 \%$
---	---	-------------------------------

- On pose la loi centrée réduite et on développe.

-	$P\left(\frac{11.97 - 12}{0.15} * \sqrt{n} < T < \frac{12.03 - 12}{0.15} * \sqrt{n}\right) = 0.99$	$P(-0.2 * \sqrt{n} < T < 0.2 * \sqrt{n}) = 0.99$
---	--	--

- Au regard de l'expression trouvée, on applique ici le théorème : $P(-a < x < +a) = 2\pi(a) - 1$

$(2 * \pi(0.2 * \sqrt{n})) - 1 = 0.99$	$\pi(0.2 * \sqrt{n}) = \frac{1 + 0.99}{2} = 0.995$	Lecture inversée table $t = 2,58$
--	--	-----------------------------------

- Pour estimer une taille moyenne M à 0.03 mm la taille minimale de l'effectif

$\sqrt{n} = \frac{2,58}{0.2} = 12.9002$	$n = (12.9002)^2 = 166.41534$	Taille de l'effectif 166
---	-------------------------------	--------------------------

La taille minimum de l'échantillon doit être de 166.

3.2.2 Estimation par la moyenne Écart type inconnu

WP-CMS

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	100	n
m	0	Moyenne	158	m'
p	0	Proportion	0	p'
σ	0	Écart type	30	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$m' = m \Rightarrow m = 158$	$S = \sigma_{estimé} = \sigma' * \sqrt{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow S = 30.00$	$Sc = 0.99 \Rightarrow 99 \%$
------------------------------	--	-------------------------------

- On définit les paramètres de l'intervalle de confiance.

$\left[m - t * \frac{S}{\sqrt{n}}; m + t * \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$	-	Ici $S = \sigma_{estimé} = \sigma' * \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 30.00$
---	---	--

- Calculer le paramètre t pour un seuil de confiance de 0.99.

Poser la formule $2\pi(t) - 1 = Sc$	$\pi(t) = \frac{1 + 0.99}{2} = 0.995$	Lecture inversée table $t = 2,58$
-------------------------------------	---------------------------------------	-----------------------------------

- Calculer l'intervalle de confiance.

$\left[158 - 2,58 * \frac{30.00}{\sqrt{100}}; 158 + 2,58 * \frac{30.00}{\sqrt{100}} \right]$	$[150.26; 165.74]$	-
---	--------------------	---

Au seuil de confiance de 99 %, l'intervalle de confiance de la moyenne est comprise ente 150.26 et 165.74.

3.2.3 Estimation par la proportion

Population			Échantillon	
N	0	Effectif	200	n
m	0	Moyenne	0	m'
p	0	Proportion	0.7	p'
σ	0	Écart type	0	σ'

- On définit les éléments de la loi normal.

$p' = p \Rightarrow p = 0.7$	$\sigma'_m = \sqrt{\frac{p * q}{n}} \Rightarrow \sigma'_m = 0.03244$	$Sc = 0.95 \Rightarrow 95 \%$
------------------------------	--	-------------------------------

- On définit les paramètres de l'intervalle de confiance.

$\left[P - t * \sqrt{\frac{p * q}{n}}; P + t * \sqrt{\frac{p * q}{n}} \right]$	$[P - t * \sigma'_m; P + t * \sigma'_m]$	Ici $\sigma'_m = \sqrt{\frac{p * q}{n}}$
---	--	--

- Calculer le paramètre t pour un seuil de confiance de 0.95.

Poser la formule $2\pi(t) - 1 = Sc$	$\pi(t) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.97499$	Lecture inversée table $t = 1,96$
-------------------------------------	---	-----------------------------------

- Calculer l'intervalle de confiance.

$[0.7 - 1,96 * 0.03244; 0.7 + 1,96 * 0.03244]$	$[0.64; 0.76]$	-
--	----------------	---

Au seuil de confiance de 95 %, l'intervalle de confiance de la moyenne est comprise entre 64 % et 76 %.

- On pose la probabilité.

$P(p - \varepsilon < \bar{X} < p + \varepsilon = Sc)$	$P(0.7 - 0.1 < F < 0.7 + 0.1 = 0.9)$	$Sc = 0.99 \Rightarrow 99 \%$
---	--------------------------------------	-------------------------------

- On pose la loi centrée réduite et on développe.

-	$P\left(\frac{0.6 - 0.7}{\sqrt{0.7 * 0.3}} * \sqrt{n} < T < \frac{0.8 - 0.7}{\sqrt{0.7 * 0.3}} * \sqrt{n}\right) = 0.99$	$P(-0.22 * \sqrt{n} < T < 0.22 * \sqrt{n}) = 0.99$
---	--	--

- Au regard de l'expression, on applique ici le théorème : $P(-a < x < +a) = 2\pi(a) - 1$ avec $a = -0.22 * \sqrt{n}$

$(2 * \pi(0.22 * \sqrt{n})) - 1 = 0.99$	$\pi(0.2 * \sqrt{n}) = \frac{1 + 0.99}{2} = 0.995$	Lecture inversée table $t = 2,58$
---	--	-----------------------------------

- Pour estimer une taille moyenne M à 0.1 mm la taille minimale de l'effectif.

$\sqrt{n} = \frac{2,58}{0.22} = 11.73$	$n = (11.73)^2 = 138$	Taille de l'effectif 138
--	-----------------------	---------------------------------

La taille minimum de l'échantillon doit être de 138.