



WP-CMS

Mathématiques

# LES STATISTIQUES INFÉRENTIELLES

Exercices

Version 1.1.0

→ *Document de référence*

# Table des matières

|                                                                                      |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Échantillonnage</b>                                                             | <b>3</b> |
| 1.1 DISTRIBUTION D'ÉCHANTILLONNAGE DES MOYENNES . . . . .                            | 3        |
| 1.1.1 Énoncé . . . . .                                                               | 3        |
| 1.1.2 Corrigé . . . . .                                                              | 4        |
| 1.2 DISTRIBUTION D'ÉCHANTILLONNAGE DES PROPORTIONS . . . . .                         | 5        |
| 1.2.1 Énoncé . . . . .                                                               | 5        |
| 1.2.2 Corrigé . . . . .                                                              | 6        |
| <b>2 Estimations</b>                                                                 | <b>7</b> |
| 2.1 ESTIMATION PONCTUELLE DE LA MOYENNE, DE LA PROPORTION ET DE L'ÉCART-TYPE I . . . | 7        |
| 2.1.1 Énoncé . . . . .                                                               | 7        |
| 2.1.2 Corrigé . . . . .                                                              | 8        |
| 2.2 ESTIMATION PONCTUELLE DE LA MOYENNE, DE LA PROPORTION ET DE L'ÉCART-TYPE II . .  | 9        |
| 2.2.1 Énoncé . . . . .                                                               | 9        |
| 2.2.2 Corrigé . . . . .                                                              | 10       |
| 2.3 ESTIMATION DE LA MOYENNE PAR INTERVALLE DE CONFIANCE (ÉCART-TYPE CONNU) . . .    | 11       |
| 2.3.1 Énoncé . . . . .                                                               | 11       |
| 2.3.2 Corrigé . . . . .                                                              | 12       |
| 2.4 ESTIMATION DE LA MOYENNE PAR INTERVALLE DE CONFIANCE (ECART-TYPE INCONNU) . .    | 13       |
| 2.4.1 Énoncé . . . . .                                                               | 13       |
| 2.4.2 Corrigé . . . . .                                                              | 14       |
| 2.5 ESTIMATION DE LA PROPORTION PAR INTERVALLE DE CONFIANCE . . . . .                | 15       |
| 2.5.1 Énoncé . . . . .                                                               | 15       |
| 2.5.2 Corrigé . . . . .                                                              | 16       |

# Chapitre 1

## Échantillonnage

### 1.1. DISTRIBUTION D'ÉCHANTILLONNAGE DES MOYENNES

---

#### 1.1.1 Énoncé

Une usine produit des disques en grande série. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui à chaque disque, pris au hasard, associe son diamètre. On suppose que  $X$  suit la loi normale de moyenne  $m = 40$  mm et d'écart-type  $\sigma = 4$  mm. On prélève au hasard des échantillons non exhaustifs de 49 disques. On note  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui pour chaque échantillon associe la moyenne des diamètres des 49 disques.

- 1) Quelle est la loi suivie par  $\bar{X}$  ?
- 2) Quelle est la probabilité que sur un échantillon on tombe sur un diamètre moyen  $< 39$  mm
- 3) Quelle est la probabilité que sur un échantillon on tombe sur un diamètre moyen  $> 41$  mm
- 4) Quelle est la probabilité que sur un échantillon le diamètre moyen soit compris entre 39 mm et 41 mm

## 1.1.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres                               | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif                               | $n = 49$                       |
| $m = 40$                     | moyenne                                  | $m' = 40$                      |
| $p$                          | la proportion %                          | $p'$                           |
| $\sigma = 4$                 | l'écart type                             | $\sigma' = 0,57$               |
| Les paramètres sont - connus | $\Rightarrow$ On en déduit $\Rightarrow$ | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |           |                               |   |              |         |
|-------------|-----|-------------|-----------|-------------------------------|---|--------------|---------|
| $n \geq 30$ | 49  | $np \geq 5$ | -         | $nq \geq 5$                   | - | $npq \geq 5$ | -       |
| Conforme    | Oui | Non         | $\bar{X}$ | variable aléatoire associée à |   |              | moyenne |

| Question 01            | Le processus                                                           | Les notes                              |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Loi normal définie par | $\bar{X} \cap \eta(m'; \sigma')$                                       | Conditions remplies                    |
| La moyenne             | $m' = m = 40$                                                          |                                        |
| L'écart type           | $\sigma'_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{49}} = 0,57$    |                                        |
| La loi normal répond à | $\bar{X} \cap \eta(40; 0,57)$                                          |                                        |
| Loi centrée réduite    | $\frac{\bar{X} - m'}{\sigma'} = \frac{\bar{X} - 40}{0,57} \cap (0; 1)$ | $\Rightarrow$ Utilisation de la table. |

| Question 02                                                                    | Le processus                                                                       | Les notes                       |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| Probabilité $\phi < 39$                                                        | $P(\bar{X} < 39) = P\left(\frac{\bar{X} - 40}{0,57} < \frac{39 - 40}{0,57}\right)$ | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$ |
| -                                                                              | $P(T < -1,75) \Rightarrow \pi(a) = 0,95994$                                        | Cas $P(x < -a) = 1 - \pi(a)$    |
| -                                                                              | $P(\bar{X} < 39) = 1 - 0,95994 = 0,04006$                                          |                                 |
| Il y a donc 4 % de chance de tomber sur un disque dont la moyenne est $< 39$ . |                                                                                    |                                 |

| Question 03                                                                    | Le processus                                                                       | Les notes                       |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| Probabilité $\phi > 41$                                                        | $P(\bar{X} > 41) = P\left(\frac{\bar{X} - 40}{0,57} > \frac{41 - 40}{0,57}\right)$ | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$ |
| -                                                                              | $P(T > +1,75) \Rightarrow \pi(a) = 0,95994$                                        | Cas $P(x > a) = 1 - \pi(a)$     |
| -                                                                              | $P(\bar{X} > 41) = 1 - 0,95994 = 0,04006$                                          |                                 |
| Il y a donc 4 % de chance de tomber sur un disque dont la moyenne est $> 41$ . |                                                                                    |                                 |

| Question 04                                                                                             | Le processus                                                    | Les notes                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Probabilité $39 < \phi < 41$                                                                            | $P(39 < \bar{X} < 41)$                                          | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$             |
| -                                                                                                       | $P\left(\frac{39 - 40}{0,57} < T < \frac{41 - 40}{0,57}\right)$ | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$             |
| -                                                                                                       | $P(-1,75 < T < +1,75)$                                          | Cas $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$ |
| -                                                                                                       | $\Rightarrow 2\pi(1,75) - 1 = 0,91988$                          | -                                           |
| -                                                                                                       | $P(39 < \bar{X} < 41) = 0,91988$                                |                                             |
| Il y a donc 92 % de chance de tomber sur un disque dont la moyenne est compris entre $39 < \phi < 41$ . |                                                                 |                                             |

## 1.2. DISTRIBUTION D'ÉCHANTILLONNAGE DES PROPORTIONS WP CMS

---

### 1.2.1 Énoncé

Une entreprise produit une grande série de pièces pour le bâtiment. Pour analyser la qualité de la production, on prélève au hasard un échantillon de  $n = 60$  pièces. On suppose que le pourcentage de pièces défectueuses dans la production est de 10%. Soit  $F$  la variable aléatoire qui à tout échantillon de  $n$  pièces associe la fréquence de pièces défectueuses dans cet échantillon.

- 1) Quelle est, approximativement, la loi suivie par  $F$  ? Précisez-en les paramètres.
- 2) Quelle est la probabilité que sur un échantillon donné, la fréquence de pièce défectueuses soit  $< 9\%$  ?
- 3) Quelle est la probabilité que sur un échantillon donné, la fréquence de pièce défectueuses soit  $> 11\%$  ?
- 4) Quelle est la probabilité que sur un échantillon donné, la fréquence de pièce défectueuses soit comprise entre 9% et 11% ?

| POPULATION                   | Paramètres                               | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif                               | $n = 60$                       |
| $m$                          | moyenne                                  | $m'$                           |
| $p=0,1$                      | la proportion %                          | $p' = 0,1$                     |
| $\sigma = 4$                 | l'écart type                             | $\sigma' = 0,039$              |
| Les paramètres sont - connus | $\Rightarrow$ On en déduit $\Rightarrow$ | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |   |                               |    |              |           |
|-------------|-----|-------------|---|-------------------------------|----|--------------|-----------|
| $n \geq 30$ | 60  | $np \geq 5$ | 6 | $nq \geq 5$                   | 54 | $npq \geq 5$ | 5,4       |
| Défectueux  | Oui | Non         | F | variable aléatoire associée à |    |              | fréquence |

| Question 01            | Le processus                                                       | Les notes                              |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Loi normal définie par | $F \sim \eta(p'; \sigma')$                                         | Conditions remplies                    |
| La fréquence           | $p' = p = 0,1$                                                     |                                        |
| L'écart type           | $\sigma'_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0,039$                          |                                        |
| La loi normal répond à | $F \sim \eta(0,1; 0,039)$                                          |                                        |
| Loi centrée réduite    | $\frac{F - p'}{\sigma'} = \frac{\bar{F} - 0,1}{0,039} \sim (0; 1)$ | $\Rightarrow$ Utilisation de la table. |

| Question 02                                                                               | Le processus                                                     | Les notes                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Probabilité $F < 9\%$                                                                     | $P(F < 0,09)$                                                    |                              |
| -                                                                                         | $P\left(\frac{F - 0,1}{0,039} < \frac{0,09 - 0,1}{0,039}\right)$ | $T = \frac{F - 0,1}{0,039}$  |
| -                                                                                         | $P(T < -0,26) \Rightarrow \pi(a) = 0,60257$                      | Cas $P(x < -a) = 1 - \pi(a)$ |
| -                                                                                         | $F < 0,09) = 1 - 0,60257 = 0,39743$                              |                              |
| Il y a donc 40 % de chance de tomber sur produit défectueux dont la fréquence est $< 9$ . |                                                                  |                              |

| Question 03                                                                                  | Le processus                                                     | Les notes                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Probabilité $F > 0,11\%$                                                                     | $P(F > 0,11)$                                                    |                              |
| -                                                                                            | $P\left(\frac{F - 0,1}{0,039} > \frac{0,11 - 0,1}{0,039}\right)$ | $T = \frac{F - 0,1}{0,039}$  |
| -                                                                                            | $P(T > 0,26) \Rightarrow \pi(a) = 0,60257$                       | Cas $P(x > +a) = 1 - \pi(a)$ |
| -                                                                                            | $F > 0,11) = 1 - 0,60257 = 0,39743$                              |                              |
| Il y a donc 40 % de chance de tomber sur produit défectueux dont la fréquence est $> 0,11$ . |                                                                  |                              |

| Question 04                                                                                            | Le processus                                                    | Les notes                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Probabilité $39 < \phi < 41 <$                                                                         | $P(39 < \bar{X} < 41)$                                          | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$             |
| -                                                                                                      | $P\left(\frac{39 - 40}{0,57} < T < \frac{41 - 40}{0,57}\right)$ | $T = \frac{\bar{X} - 40}{0,57}$             |
| -                                                                                                      | $P(-1,75 < T < +1,75)$                                          | Cas $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$ |
| -                                                                                                      | $\Rightarrow 2\pi(1,75) - 1 = 0,91988$                          | -                                           |
| -                                                                                                      | $P(39 < \bar{X} < 41) = 0,91988$                                |                                             |
| Il y a donc 92 % de chance de tomber sur un disque dont la moyenne est compris ente $39 < \phi < 41$ . |                                                                 |                                             |

## Chapitre 2

# Estimations

### 2.1. ESTIMATION PONCTUELLE DE LA MOYENNE, DE LA PROPORTION ET DE L'ÉCART-TYPE I

---

#### 2.1.1 Énoncé

Une entreprise fabrique des tiges métalliques. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de 100 tiges dans la production d'une journée. Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 tiges, associe le diamètre moyen de ces tiges.

On suppose que  $\bar{X}$  suit la loi normale de paramètre inconnus (moyenne et écart-type). Sur l'échantillon, on a observé une moyenne = 10 mm et un écart-type de 0,20 mm.

- 1) À partir de ces informations, donnez une estimation ponctuelle de la moyenne  $\mu$  des diamètres des tiges produites dans une journée.
  - 2) À partir de ces informations, donnez une estimation ponctuelle de l'écart-type des moyennes des diamètres des tiges fabriqués par l'entreprise.
-

### 2.1.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres      | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif      | $n = 100$                      |
| $m = 10$                     | moyenne         | $m' = 10$                      |
| $p$                          | la proportion % | $p'$                           |
| $\sigma = 0,201$             | l'écart type    | $\sigma' = 0,20$               |
| Les paramètres sont - connus | ← On estime ←   | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |           |                               |  |              |         |
|-------------|-----|-------------|-----------|-------------------------------|--|--------------|---------|
| $n \geq 30$ | 100 | $np \geq 5$ |           | $nq \geq 5$                   |  | $npq \geq 5$ |         |
| Défectueux  | Oui | Non         | $\bar{X}$ | variable aléatoire associée à |  |              | moyenne |

| Question 01                  | Le processus                                                                                       | Les notes             |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Loi normal définie par       | $\bar{X} \cap \eta(m'; \sigma')$                                                                   | Conditions remplies   |
| La moyenne                   | $m' = m = 10$                                                                                      | ← loi échantillonnage |
| L'écart type estimé <b>S</b> | $\sigma = \sigma'_m * \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \mathbf{S} = 0,20 * \sqrt{\frac{100}{100-1}} = 0,201$ |                       |
| La loi normal répond à       | $\bar{X} \cap \eta(10; 0,201)$                                                                     |                       |
| Loi centrée réduite          | -                                                                                                  | -                     |



## 2.2. ESTIMATION PONCTUELLE DE LA MOYENNE, DE LA PROPORTION ET DE L'ÉCART-TYPE II <sup>WP-CMS</sup>

---

### 2.2.1 Énoncé

À quelques heures d'une élection, un candidat fait faire un sondage. Sur les 150 personnes interrogées, 45 se disent prêtes à voter pour lui aux prochaines élections.

- 1) Déterminer une estimation ponctuelle des paramètres
- 2) Effectuer une estimation de  $p$  par intervalle de confiance à 95% de seuil de confiance.

## 2.2.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres      | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif      | $n = 150$                      |
| $m$                          | moyenne         | $m'$                           |
| $p = 0,3$                    | la proportion % | $p' = \frac{45}{150} = 0,3$    |
| $\sigma = 0,037$             | l'écart type    | $\sigma'$                      |
| Les paramètres sont - connus | ← On estime ←   | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |     |                               |     |              |           |
|-------------|-----|-------------|-----|-------------------------------|-----|--------------|-----------|
| $n \geq 30$ | 150 | $np \geq 5$ | 45  | $nq \geq 5$                   | 105 | $npq \geq 5$ | 31,5      |
| Défectueux  | Oui | Non         | $F$ | variable aléatoire associée à |     |              | fréquence |

| Question 01            | Le processus                                                          | Les notes                  |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Loi normal définie par | $F \sim \eta(p; \sigma)$                                              | Conditions remplies        |
| La proportion          | $p' = p = 0,3$                                                        | ← loi échantillonnage      |
| L'écart type           | $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,3 * 0,7}{150}} = 0,037$ |                            |
| La loi normal répond à | $F \sim \eta(0,3; 0,037)$                                             |                            |
| Loi centrée réduite    | $\frac{F - p'}{\sigma'} = \frac{\bar{F} - 0,1}{0,039} \sim (0; 1)$    | ⇒ Utilisation de la table. |

| Question 02                                                        | Le processus                                                                                          | Les notes                 |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Intervalle de confiance                                            | $\left[ P - t * \sqrt{\frac{pq}{n}}; P + t * \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$                             |                           |
| Seuil de confiance                                                 | $S_c = 0,95$                                                                                          | -                         |
| On pose la formule                                                 | $2\pi(t) - 1 = 0,95 \Rightarrow \pi(t) = 0,975$                                                       | ⇒ Utilisation de la table |
| -                                                                  | $\pi(t) = 0,975$ donc $t = 1,96$                                                                      |                           |
| Intervalle de confiance                                            | $\left[ 0,3 - 1,96 * \sqrt{\frac{0,3 * 0,7}{150}}; 0,3 + 1,96 * \sqrt{\frac{0,3 * 0,7}{150}} \right]$ |                           |
| -                                                                  | $[0,2275; 0,373]$                                                                                     |                           |
| Au seuil de 95 % la proportion est comprise entre 22,7 % et 37,3 % |                                                                                                       |                           |

## 2.3. ESTIMATION DE LA MOYENNE PAR INTERVALLE DE CONFIANCE (ÉCART-TYPE CONNU) WP-CMS

---

### 2.3.1 Énoncé

Une entreprise fabrique des tiges métalliques. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. On prélève au hasard un échantillon de 100 tiges dans la production d'une journée. Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 tiges, associe le diamètre moyen de ces tiges.

On suppose que  $\bar{X}$  suit la loi normale de paramètre  $m$  (moyenne inconnue) et écart-type = 0,15 mm. Sur l'échantillon, on a observé une moyenne = 12 mm.

- 1) Déterminez un intervalle de confiance de la moyenne  $m$  à 95% de seuil de confiance.
- 2) Même question, mais avec un seuil de risque de 1%.
- 3) Quelle doit être la taille minimale  $n$  pour estimer  $m$  à  $\pm 0.03$  mm près par intervalle de confiance, avec le risque 1% ?

### 2.3.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres      | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif      | $n = 100$                      |
| $m = 12$                     | ← moyenne Loi   | $m' = 12$                      |
| $p$                          | la proportion % | $p'$                           |
| $\sigma = 0,15$              | l'écart type    | $\sigma'$                      |
| Les paramètres sont - connus | ← On estime ←   | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |     |                               |  |              |           |
|-------------|-----|-------------|-----|-------------------------------|--|--------------|-----------|
| $n \geq 30$ | 100 | $np \geq 5$ |     | $nq \geq 5$                   |  | $npq \geq 5$ |           |
| Défectueux  | Oui | Non         | $F$ | variable aléatoire associée à |  |              | fréquence |

| Question 01                                                                                | Le processus                                                                      | Les notes                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Intervalle de confiance                                                                    | $\left[ m - t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ | $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,015$ |
| Seuil de confiance                                                                         | $S_c = 0,95$                                                                      | -                                           |
| On pose la formule                                                                         | $2\pi(t) - 1 = 0,95 \Rightarrow \pi(t) = 0,975$                                   | $\Rightarrow$ Utilisation de la table       |
| -                                                                                          | $\pi(t) = 0,975$ donc $t = 1,96$                                                  |                                             |
| Intervalle de confiance                                                                    | $[12 - 1,96 * 0,015; 12 + 1,96 * 0,015]$                                          |                                             |
| -                                                                                          | $[11,97; 12,03]$                                                                  |                                             |
| Au seuil de 95 % l'intervalle de confiance de la moyenne est comprise entre 11,97 et 12,03 |                                                                                   |                                             |

| Question 02                                                                                         | Le processus                                                                      | Les notes                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Intervalle de confiance                                                                             | $\left[ m - t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ | $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,015$ |
| Seuil de confiance                                                                                  | $S_c = 0,99$ car $S_r = 0,01$                                                     | -                                           |
| On pose la formule                                                                                  | $2\pi(t) - 1 = 0,99 \Rightarrow \pi(t) = 0,995$                                   | $\Rightarrow$ Utilisation de la table       |
| -                                                                                                   | $\pi(t) = 0,995$ donc $t = 2,58$                                                  |                                             |
| Intervalle de confiance                                                                             | $[12 - 2,58 * 0,015; 12 + 2,58 * 0,015]$                                          |                                             |
| -                                                                                                   | $[11,96; 12,04]$                                                                  |                                             |
| Au seuil de risque de 1 % l'intervalle de confiance de la moyenne est comprise entre 11,96 et 12,07 |                                                                                   |                                             |

| Question 03                                              | Le processus                                                                                         | Les notes                                              |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Seuil de confiance                                       | $S_c = 0,99$ car $S_r = 0,01$                                                                        | -                                                      |
| Probabilité moyenne $\pm \varepsilon$                    | $P(11,97 < \bar{X} < 12,03 = 0,99)$                                                                  | $P(m - \varepsilon < \bar{X} < m + \varepsilon = S_c)$ |
| Loi normale centrée réduite                              | $P\left(\frac{11,97 - 12}{0,015} * \sqrt{n} < T < \frac{12,03 - 12}{0,015} * \sqrt{n} = 0,99\right)$ |                                                        |
| On développe                                             | $P(-0,2\sqrt{n} < T < +0,2\sqrt{n} = 0,99)$                                                          |                                                        |
| On pose la formule                                       | $2\pi(0,2\sqrt{n}) - 1 = 0,99 \Rightarrow$<br>$\pi(0,2\sqrt{n}) = 0,995$                             | Cas $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$            |
| -                                                        | $\pi(0,2\sqrt{n}) = 0,995$ donc $t = 2,58$                                                           | Selon la table                                         |
| On trouve l'effectif de                                  | $\sqrt{n} = 12,9 \Rightarrow n = 167$                                                                |                                                        |
| La taille minimale de $N$ pour estimer $M$ à 0,3 mm près |                                                                                                      |                                                        |

## 2.4. ESTIMATION DE LA MOYENNE PAR INTERVALLE DE CONFIANCE (ECART-TYPE INCONNU) WP-CMS

---

### 2.4.1 Énoncé

Un fabricant de piles électriques affirme que la durée de vie moyenne du matériel qu'il produit est de 170 heures. Un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard un échantillon de  $n = 100$  piles et observe une durée de vie moyenne de 158 heures avec un écart-type empirique de 30 heures.

- 1) Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0,99 pour la durée de vie moyenne  $\mu$ .
- 2) Peut-on accuser ce fabricant de publicité mensongère ?

## 2.4.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres           | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif           | $n = 100$                      |
| $m$                          | ←moyenne <b>Loi</b>  | $m' = 158$                     |
| $p$                          | la proportion %      | $p'$                           |
| $\sigma$                     | l'écart type         | $\sigma' = 30$                 |
| Les paramètres sont - connus | ← <b>On estime</b> ← | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |          |                               |  |              |           |
|-------------|-----|-------------|----------|-------------------------------|--|--------------|-----------|
| $n \geq 30$ | 100 | $np \geq 5$ |          | $nq \geq 5$                   |  | $npq \geq 5$ |           |
| Défectueux  | Oui | Non         | <b>F</b> | variable aléatoire associée à |  |              | fréquence |

| Question 01                                                                                                              | Le processus                                                                                  | Les notes                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Intervalle de confiance                                                                                                  | $\left[ m - t * \frac{S}{\sqrt{n}}; m + t * \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$                       | $S = \sigma_{estimé} = \sigma' * \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 30,15$ |
| Seuil de confiance                                                                                                       | $S_c = 0,99$                                                                                  | -                                                              |
| On pose la formule                                                                                                       | $2\pi(t) - 1 = 0,99 \Rightarrow \pi(t) = 0,995$                                               | $\Rightarrow$ Utilisation de la table                          |
| -                                                                                                                        | $\pi(t) = 0,995$ donc $t = 2,58$                                                              |                                                                |
| Intervalle de confiance                                                                                                  | $\left[ 158 - 2,58 * \frac{30,15}{\sqrt{100}}; 158 + 2,58 * \frac{30,15}{\sqrt{100}} \right]$ |                                                                |
| -                                                                                                                        | [150,22; 165,78]                                                                              |                                                                |
| A 99 % du seuil de confiance la durée moyenne des pile est comprise ente 150,22 et 165,78. Il donc publicité mensongère. |                                                                                               |                                                                |

## 2.5. ESTIMATION DE LA PROPORTION PAR INTERVALLE DE CONFIANCE WP-CMS

---

### 2.5.1 Énoncé

La proportion  $P$  de ménages d'une ville qui possède au moins un smartphone est inconnue.

On note  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 200 ménages d'une ville, associe le pourcentage de ménages de cet échantillon ayant au moins un smartphone. Pour un de ces échantillons,  $F$  vaut 70%.

- 1) Donnez une estimation de  $p$  par intervalle de confiance avec le risque 5%.
  - 2) Même question avec un seuil de confiance de 99%.
  - 3) Quelle doit être la taille minimale  $n$  pour estimer  $p$  à  $\pm 10\%$  près par intervalle de confiance, avec le risque 1% ?
-

## 2.5.2 Corrigé

WP-CMS

| POPULATION                   | Paramètres           | ÉCHANTILLON                    |
|------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| $N$                          | l'effectif           | $n = 200$                      |
| $m$                          | moyenne              | $m'$                           |
| $p = 0,7$                    | ↔ la proportion Loi% | $p' = 0,7$                     |
| $\sigma$                     | l'écart type         | $\sigma'$                      |
| Les paramètres sont - connus | ↔ On estime ↔        | Les paramètres sont à calculer |

|             |     |             |     |                               |    |              |           |
|-------------|-----|-------------|-----|-------------------------------|----|--------------|-----------|
| $n \geq 30$ | 200 | $np \geq 5$ | 140 | $nq \geq 5$                   | 60 | $npq \geq 5$ | 42        |
| Défectueux  | Oui | Non         | $F$ | variable aléatoire associée à |    |              | fréquence |

| Question 01                                                                                                     | Le processus                                                              | Les notes                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Intervalle de confiance                                                                                         | $\left[ P - t * \sqrt{\frac{pq}{n}}; P + t * \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$ | -                         |
| Seuil de confiance                                                                                              | $S_c = 0,95$ car $S_r = 0,05$                                             | -                         |
| On pose la formule                                                                                              | $2\pi(t) - 1 = 0,95 \Rightarrow \pi(t) = 0,975$                           | ⇒ Utilisation de la table |
| -                                                                                                               | $\pi(t) = 0,975$ donc $t = 1,96$                                          |                           |
| Intervalle de confiance                                                                                         | $[0,7 - 1,96 * 0,3240; 0,7 + 1,96 * 0,3240]$                              |                           |
| -                                                                                                               | $[0,64; 0,76]$                                                            |                           |
| Au seuil de 95 % l'intervalle de confiance des ménage qui possède un smart phone est comprise ente 64 % et 76 % |                                                                           |                           |

| Question 02                                                                                                     | Le processus                                                              | Les notes                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Intervalle de confiance                                                                                         | $\left[ P - t * \sqrt{\frac{pq}{n}}; P + t * \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$ | -                         |
| Seuil de confiance                                                                                              | $S_c = 0,99$                                                              | -                         |
| On pose la formule                                                                                              | $2\pi(t) - 1 = 0,99 \Rightarrow \pi(t) = 0,995$                           | ⇒ Utilisation de la table |
| -                                                                                                               | $\pi(t) = 0,995$ donc $t = 2,58$                                          |                           |
| Intervalle de confiance                                                                                         | $[0,7 - 2,58 * 0,3240; 0,7 + 2,58 * 0,3240]$                              |                           |
| -                                                                                                               | $[0,62; 0,78]$                                                            |                           |
| Au seuil de 99 % l'intervalle de confiance des ménage qui possède un smart phone est comprise ente 62 % et 78 % |                                                                           |                           |

| Question 03                                                    | Le processus                                                                                     | Les notes                                        |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Seuil de confiance                                             | $S_c = 0,99$ car $S_r = 0,01$                                                                    | -                                                |
| Probabilité moyenne $\pm \varepsilon$                          | $P(0,7 - 0,1 < F < 0,7 + 0,1 = 0,99)$                                                            | $P(m - \varepsilon < F < m + \varepsilon = S_c)$ |
| Loi normale centrée réduite                                    | $P\left(\frac{0,6 - 0,7}{0,46} * \sqrt{n} < T < \frac{0,8 - 0,7}{0,46} * \sqrt{n} = 0,99\right)$ |                                                  |
| On développe                                                   | $P(-0,22\sqrt{n} < T < +0,22\sqrt{n} = 0,99)$                                                    |                                                  |
| On pose la formule                                             | $2\pi(0,22\sqrt{n}) - 1 = 0,99 \Rightarrow$<br>$\pi(0,22\sqrt{n}) = 0,995$                       | Cas $P(-a < x < a) \Rightarrow 2\pi(a) - 1$      |
| -                                                              | $\pi(0,22\sqrt{n}) = 0,995$ donc $t = 2,58$                                                      | Selon la table                                   |
| On trouve l'effectif de                                        | $\sqrt{n} = 11,73 \Rightarrow n = 140$                                                           |                                                  |
| La taille minimale de $N = 140$ pour estimer $p$ à 0,1 mm près |                                                                                                  |                                                  |