Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Métropole – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

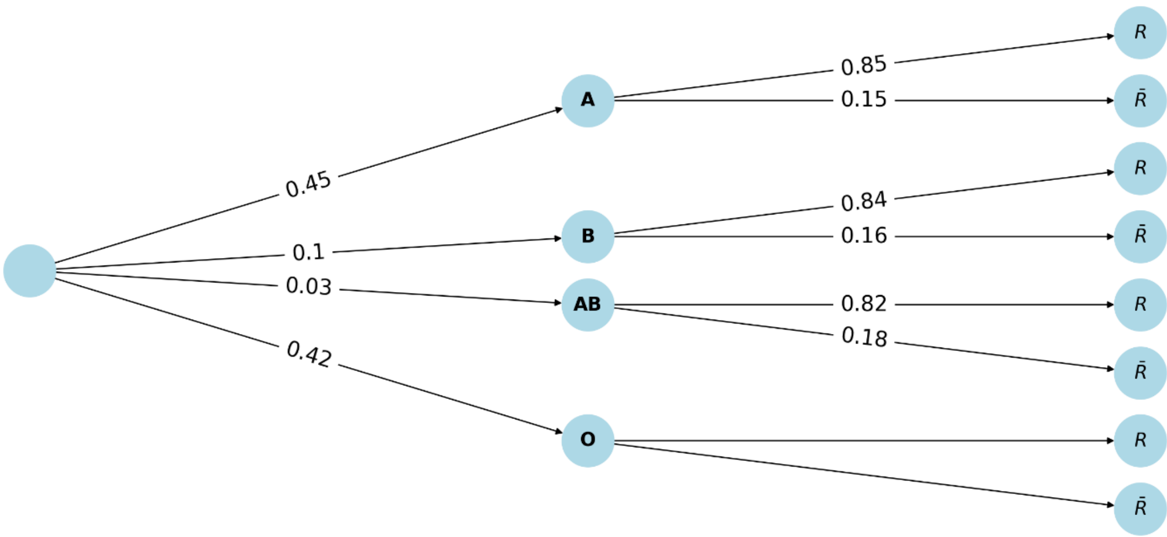
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

1. On complète l'arbre à partir des données :

- $P(A) = 0{,}45$
- $P_B = 0{,}10$
- $P_{AB} = 0{,}03$
- $P(O) = 1 - (0{,}45 + 0{,}10 + 0{,}03) = 0{,}42$
- $P(\mathrm{R}|\mathrm{A}) = 0{,}85$
- $P(\mathrm{R}|\mathrm{B}) = 0{,}84$
- $P(\mathrm{R}|\mathrm{AB}) = 0{,}82$
- $P(\bar{R}|A) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$
- $P(\bar{R}|B) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$
- $P(\bar{R}|AB) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$



2. On cherche $P(B \cap R)$, soit la probabilité qu'une personne soit de groupe B et rhésus positif :

$$P(B \cap R) = P(B) \times P(R|B) = 0{,}10 \times 0{,}84 = 0{,}084$$

<u>Interprétation</u> : 8,4 % des personnes dans la population française sont de groupe sanguin B et ont un rhésus positif.

3. On connaît :

$$P(R) = 0{,}8397$$

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$$

$$P(O \cap R) = P(R) - [P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R)]$$

$$P(O \cap R) = 0{,}8397 - [0{,}45 \times 0{,}85 + 0{,}10 \times 0{,}84 + 0{,}03 \times 0{,}82]$$

$$= 0{,}8397 - [0{,}3825 + 0{,}084 + 0{,}0246] = 0{,}8397 - 0{,}4911 = 0{,}3486$$

Donc :

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0{,}3486}{0{,}42} \approx 0{,}83$$

4. Un donneur universel est une personne de groupe O et de rhésus négatif, donc on cherche :

$$P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P(\bar{R}|O)$$

On a trouvé précédemment :

$$P(R|O) = 0{,}83 \Rightarrow P(\bar{R}|O) = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$$

Donc :

$$P(O \cap \bar{R}) = 0{,}42 \times 0{,}17 = 0{,}0714$$

5. a. On effectue un tirage avec remise de 100 personnes. Chaque personne a une probabilité $p = 0{,}0714$ d'être donneur universel. Donc $X \sim \mathcal{B}(100{,}0{,}0714)$.

5. b. On veut $P(X \leq 7)$. Avec une calculatrice on obtient :

$$P(X \leq 7) \approx 0{,}577$$

5. c. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = np = 100 \times 0{,}0714 = 7{,}14$$

Variance :

$$V(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}0714 \times (1 - 0{,}0714) \approx 100 \times 0{,}0714 \times 0{,}9286 \approx 6{,}63$$

6. a. M_N est la moyenne du nombre de donneurs universels par ville. Elle représente donc le nombre moyen de donneurs universels pour un échantillon de 100 personnes dans une ville, en moyenne sur les N villes.

6. b. L'espérance est :

$$\mathbb{E}(M_N) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_N)}{N} = \frac{N \times 7{,}14}{N} = 7{,}14$$

6. c. Les X_i sont indépendantes avec même variance $V(X_i) = 6{,}63$, donc :

$$V(M_N) = \frac{V(X_1) + \cdots + V(X_N)}{N^2} = \frac{N \times 6{,}63}{N^2} = \frac{6{,}63}{N}$$

6. d. On veut $P(7 < M_N < 7{,}28) \geq 0{,}95$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_N - \mathbb{E}(M_N)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{V(M_N)}{\epsilon^2}$$

Ici, $\epsilon = 0{,}14$, donc :

$$1 - \frac{6{,}63}{N \times 0,14^2} \geq 0{,}95 \Rightarrow \frac{6{,}63}{N \times 0{,}0196} \leq 0{,}05 \Rightarrow N \geq \frac{6{,}63}{0{,}05 \times 0{,}0196} \approx \frac{6{,}63}{0{,}00098} \approx 6765{,}3$$

Donc la plus petite valeur de N est 6766.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A en $A(1; 2)$. On lit graphiquement :

$$f'(1) = -1$$

2. Graphiquement, on observe que la courbe représentative C_f semble avoir 2 points avec une tangente horizontale sur l'intervalle $]0; 3]$, ce qui signifie que la dérivée s'annule en deux points. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; 3]$.

3. À $x = 0{,}2$, la courbe représentative C_f semble en-dessous de ses tangentes. La fonction f est donc concave. Ainsi, on a :

$$f''(0{,}2) < 0$$

Partie B

$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$

1. On résout l'équation du second degré :

$$2X^2 - 3X + 2 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$$

L'équation n'a pas de solution réelle.

Pour avoir $f(x) = 0$, il faut :

- $x = 0$ (hors de l'intervalle d'analyse) ou
- $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

En posant $X = \ln(x)$, alors cela revient à résoudre l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.

Cette équation n'a pas de solution réelle, donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction ne s'annule jamais. La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. On étudie la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

On remarque que :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) = x(\ln x)^2(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2})$$

On sait que :

- $\ln x \to +\infty$
- $\frac{3}{\ln x} \to 0$
- $\frac{2}{(\ln x)^2} \to 0$

Donc $(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2}) \to 2$

Or $x(\ln x) \to +\infty$

Ainsi, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3a. On nous donne :

$$f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$$

On dérive :

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$$

3b. Le signe de $f''(x)$ est le même que $4\ln x + 1$ car le facteur $\frac{1}{x}$ est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

Posons :

$$4\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-1/4}$$

Donc :

- Pour $x < e^{-1/4}$, $f''(x) < 0$: la courbe est concave
- Pour $x > e^{-1/4}$, $f''(x) > 0$: la courbe est convexe

Le point d'inflexion a pour abscisse $e^{-1/4}$.

3c. Avec la calculatrice, on obtient :

- $e^{-1/4} \approx 0{,}78$
- $e \approx 2{,}718$

Donc $e > e^{-1/4}$ et $e \in]e^{-1/4}$; $+\infty[$

Ainsi, la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]e^{-1/4}$; $+\infty[$.

Donc C_f est au-dessus de T_B sur $[1; +\infty[$.

Partie C

1. La tangente T_B est tangente à C_f au point $B(e; e)$, donc son équation est de la forme :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

On calcule :

- $f(e) = e(2(\ln e)^2 - 3\ln e + 2) = e(2 - 3 + 2) = e$
- $f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$

Donc :

$$y = 2(x - e) + e = 2x - 2e + e = 2x - e$$

2. Intégration par parties :

- $u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x}$
- $v' = x$, donc $v = \frac{x^2}{2}$

Alors :

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Donc :

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

À $x = e$:

$$\frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{4}$$

À $x = 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Donc :

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

3. On veut calculer :

$$\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - (2x - e))\,dx$$

On a :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) \Rightarrow f(x) - (2x - e) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) - 2x + e$$
$$= x(2(\ln x)^2 - 3\ln x) + e$$

On écrit donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^e x\,(2(\ln x)^2 - 3\ln x)\,dx + \int_1^e e\ dx = 2\int_1^e x\,(\ln x)^2 dx - 3\int_1^e x\ln x\,dx + e(e-1)$$

On admet :

- $\int_1^e x\,(\ln x)^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$
- $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$

Donc :

$$\mathcal{A} = 2\cdot\frac{e^2-1}{4} - 3\cdot\frac{e^2+1}{4} + e(e-1) = \frac{2(e^2-1)-3(e^2+1)}{4} + e^2 - e$$

$$= \frac{2e^2-2-3e^2-3}{4} + e^2 - e = \frac{-e^2-5}{4} + e^2 - e$$

$$= \left(e^2 - \frac{e^2}{4}\right) - e - \frac{5}{4} = \frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}$$

Donc :

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}$$

EXERCICE 3 (4 points)

Affirmation 1

On calcule le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-0 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Regardons l'affirmation proposée :

$$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-t \\ z = -1+3t \end{cases}$$

On y lit un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et en utilisant le point $B(3;2;-1)$ on trouve bien la représentation paramétrique de (AB).

Affirmation 1 : vraie

Affirmation 2

Pour vérifier qu'un vecteur est normal au plan (OAB), il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Ici, on peut prendre :

- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On vérifie si $\vec{n}$ est orthogonal à chacun :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0$$

Donc, $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ $\Rightarrow$ ce n'est pas un vecteur normal au plan (OAB).

<u>Affirmation 2 : fausse</u>

Affirmation 3

On a :

- vecteur directeur de d : $\vec{u} = (1;\ -1;\ 2)$
- vecteur directeur de d' : $\vec{v} = (4;\ 4;\ -6)$

On cherche un réel λ tel que :

$$(1;\ -1;\ 2) = \lambda(4;\ 4;\ -6)$$

On teste :

- $1 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$
- $-1 = 4\lambda = 1$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ les droites d et d' ne sont pas parallèles.

On regarde maintenant si les droites sont sécantes.

On cherche s'il existe k et s tels que les deux droites passent par le même point.

On pose donc les équations :

$$\begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

On résout les deux premières équations :

$$15 + k = 1 + 4s \Rightarrow k = -14 + 4s$$

$$8 - k = 2 + 4s$$

On remplace k :

$$8 - (-14 + 4s) = 2 + 4s \Rightarrow 22 - 4s = 2 + 4s \Rightarrow 20 = 8s \Rightarrow s = 2.5$$

On en déduit $k = -14 + 4 \times 2.5 = -4$

Vérifions maintenant que ces valeurs conviennent aussi pour la 3e équation :

$$-6 + 2k = 1 - 6s$$

Gauche : $-6 + 2 \times (-4) = -6 - 8 = -14$

Droite : $1 - 6 \times 2.5 = 1 - 15 = -14$

Le système est compatible.

Donc les deux droites se coupent en un point ⇒ elles sont sécantes, donc coplanaires.

<u>Affirmation 3 : fausse</u>

<u>**Affirmation 4**</u>

On cherche le point H, projeté orthogonal de C sur le plan. La droite orthogonale au plan passant par C a pour direction le vecteur normal $(1, -1, 1)$, donc :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

On cherche t tel que ce point soit dans le plan :

$$(2 + t) - (-1 - t) + (2 + t) + 1 = 0 \Rightarrow 6 + 3t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Donc $H = (0,1,0)$

Distance $CH = \| \overrightarrow{CH} \| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

<u>Affirmation 4 : vraie</u>

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

1. On cherche :

$$u_1 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = -0{,}02 + 1{,}3 = 1{,}28$$

La superficie recouverte par la posidonie au 1er juillet 2025 est donc 1,28 ha.

2. a. Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1; 20]$ Et on a vu que $u_1 = 1{,}28 \geq u_0$

Hérédité : supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

h est croissante sur $[0; 20]$ (admis), donc :

$$u_{n+1} = h(u_n) \geq h(1) = u_1 \geq 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq h(20) = -0{,}02 \times 400 + 1{,}3 \times 20 = -8 + 26 = 18$$

Donc $u_{n+1} \leq 20$

Et comme h croissante, on a $u_{n+1} = h(u_n) \geq h(u_{n-1}) = u_n$

Conclusion : la suite est croissante, majorée par 20, et $u_n \geq 1$.

2. b. La suite est croissante et majorée, donc elle converge. On note sa limite L.

2. c. À la limite, on a $\lim\, u_n = L$, donc :

$$L = -0{,}02L^2 + 1{,}3L \Rightarrow 0 = -0{,}02L^2 + 0{,}3L \Rightarrow 0 = L(-0{,}02L + 0{,}3) \Rightarrow L = 0 \quad \text{ou} \quad L = \frac{0{,}3}{0{,}02} = 15$$

Mais la suite est toujours ≥ 1 donc $L = 15$

3.a. Le modèle est croissant, donc à partir d'un certain rang n, $u_n > 14$. Cela arrivera forcément puisque la limite est 15 > 14.

3.b. Complétons l'algorithme :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 14:
        n = n + 1
        u = -0.02 * u**2 + 1.3 * u
    return n
```

Partie B

1. On dérive g :

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{0{,}02f(t)(15 - f(t))}{f(t)^2} = -0{,}02\frac{15 - f(t)}{f(t)} = -0{,}3 + 0{,}02g(t)$$

Donc :

$$g'(t) = -0{,}3 + 0{,}02g(t) \Rightarrow g'(t) = -0{,}3g(t) + 0{,}02$$

On a bien montré que g est solution de (E2).

2. C'est une équation linéaire du 1er ordre. On peut écrire :

- Solution de l'équation homogène : $y_h(t) = Ce^{-0{,}3t}$
- Une solution particulière : $y_p(t) = \frac{0{,}02}{0{,}3} = \frac{1}{15}$

Donc la solution générale est :

$$y(t) = Ce^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}$$

3. Rappel : $g(t) = \frac{1}{f(t)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{g(t)}$

Donc :

$$f(t) = \frac{1}{Ce^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{15Ce^{-0{,}3t} + 1}$$

Utilisons $f(0) = 1$ pour déterminer C :

$$f(0) = \frac{15}{15C + 1} = 1 \Rightarrow 15C + 1 = 15 \Rightarrow C = \frac{14}{15}$$

Donc :

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1}$$

4. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{15}{0+1} = 15$

Donc la superficie tend vers 15 ha avec le temps, comme dans le modèle discret.

5. On cherche :

$$f(t) > 14 \Rightarrow \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1} > 14 \Rightarrow \frac{1}{14e^{-0{,}3t} + 1} > \frac{14}{15}$$

On inverse (car les deux membres sont positifs) :

$$14e^{-0,3t}+1<\frac{15}{14}\Rightarrow 14e^{-0,3t}<\frac{15}{14}-1=\frac{1}{14}\Rightarrow e^{-0,3t}<\frac{1}{196}\Rightarrow -0,3t<\ln\left(\frac{1}{196}\right)\Rightarrow t>\frac{-\ln\left(\frac{1}{196}\right)}{0,3}=\frac{\ln(196)}{0,3}$$

$$\ln(196)=\ln(14^2)=2\ln(14)\approx 2\times 2,639=5,278\Rightarrow t>\frac{5,278}{0,3}\approx 17,59$$

Donc, au bout de 18 ans, la superficie dépassera les 14 ha.

Interprétation : D'après le modèle continu, la posidonie dépassera 14 hectares aux alentours de l'année 2042.