π

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

SESSION 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

Liens utiles :
Fiches de synthèse pour faciliter la compréhension du document.

- Exercice 1 :$\longmapsto$ *Probabilités*
- Exercice 2 :$\longmapsto$ *AnalysedegrapheetDérivées* $\longmapsto$ *Fonctions* $\longmapsto$ *Intégrales*
- Exercice 3 :$\longmapsto$ *Espacesvectorielle*
- Exercice 4 :$\longmapsto$ *Suites*

1 Exercice N° 01 (5 points) :

Préambule :
On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

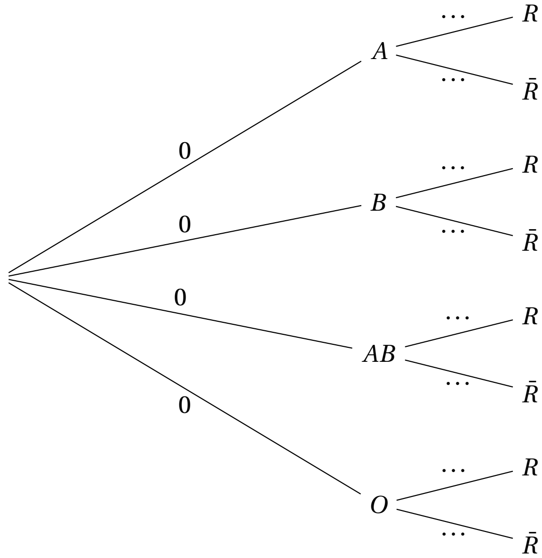
- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un événement quelconque E, on note $\bar{E}$ événement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\aleph}$

A.1.Enoncé

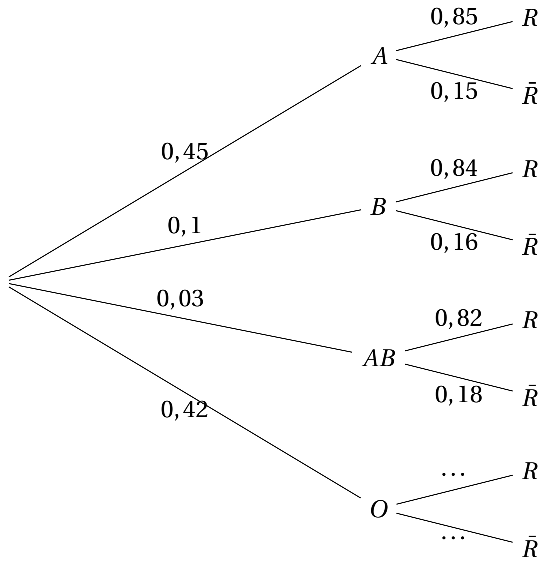
Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.



A.1.Solution

On complète l'arbre à partir des données :

- $P(A) = 0,45$
- $P(B) = 0,10$
- $P(AB) = 0,03$
- $P(O) = 1 - (0,45 + 0,10 + 0,03) = 0,42$
- $P(R/A) = 0,85$
- $P(R/B) = 0,84$
- $P(R/AB) = 0,82$
- $P(\bar{R}/A) = 1 - 0,85 = 0,15$
- $P(\bar{R}/B) = 1 - 0,84 = 0,16$
- $P(\bar{R}/AB) = 1 - 0,82 = 0,18$



A.2.Enoncé

Montrer que $P(B\bigcap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

A.2.Solution

- On cherche $P(B\bigcap R)$, soit la probabilité qu'une personne soit de groupe B et rhésus positif.
- $P(B\bigcap R = P(B) * P(R/B)) = 0,10 * 0,84 = 0,084$

$P(B\bigcap R = 0,084$

A.3.Enoncé

On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_o(R) = 0,8397$.

A.3.Solution

On utilise la formule des probabilités totales :

- $P(R) = P(A\cap R) + P(B\cap R) + P(AB\cap R) + P(O\cap R)$
- $P(O\cap R) = P(R) - [P(A\cap R) + P(B\cap R) + P(AB\cap R)]$
  $= 0,8397 - [(0,45 * 0,85) + (0,10 * 0,84) + (0,03 * 0,82)]$
  $= 0,8397 - [0,3825) + 0,084 + 0,0246]$
  $= 0,8397 - 0,4911$
  Soit $0,3486$.

$P_0(R) = \frac{P(O\bigcap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} \approx 0,83$

A.4.Enoncé

On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de $0,0714$.

A.4.Solution

Un donneur universel est une personne de groupe O et de rhésus négatif, donc on cherche :

- $P(O\bigcap \bar{R}) = P(O) * P()\bar{R}/O$
- $P(O/R) = 0,83 \Rightarrow P(O\bigcap \bar{R}) = 1 - 0,83 = 0,17$
- $P(O/R) = 0,42 * 0,17 = 0,0714$

$P(O/R) = 0,0714$

A.5.Enoncé

Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
- c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7,14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6,63$ à 10^{-2} près.

A.5.Solution
Procédure

- On effectue un tirage avec remise de 100 personnes. Chaque personne a une probabilité $p = 0,0714$ d'être donneur universel. Donc $X \approx \beta(100, 0, 0714)$.
- On veut $PX \leqslant (7))$. Avec une calculatrice on obtient : $PX \leqslant (7) \approx 0,577)$
- **Espérance** : $E(X) = np = 100 * 0,0714 = 7,14$
  Variance : $V(X) = np(1-p) = 100 * 0,0714 * (1-0,0714) \approx 100 * 0,0714 * 0,9286 \approx 6,63$

Conclusion

A.6.Enoncé

Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, N$ ou N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.
On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + X_N}{N}$

- Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
- Calculer l'espérance $E(M_N)$
- On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N. Montrer que $V(M_N = \frac{6,63}{N}$
- Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé Tchebychev permet d'affirmer que :$P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$

A.6.Solution

- MN est la moyenne du nombre de donneurs universels par ville. Elle représente donc le nombre moyen de donneurs universels pour un échantillon de 100 personnes dans une ville, en moyenne sur les N villes
- L'espérance est : $E(M_n) = \frac{E(X_1 + ... + E(X_n))}{N} = \frac{n*7,14}{n} = 7,14$
- Les X_i sont indépendantes avec même variance $V(X_i = 6,63)$, donc :

  $V(M_n) = \frac{V(X_1 + ... + V(X_{n^2}))}{N} = \frac{n*6,63}{2} = \frac{6,63}{n}$
- On veut $P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$.on utilise l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

  $P(|M_n - E(M_n)| < \varepsilon \geq 1 - \frac{V(M_n)}{\varepsilon}^2)$ ic $\varepsilon = 0,14$ donc :

  $1 - \frac{6,63}{n*0,14^2} \geq 0,95 \Rightarrow \frac{6,63}{n*0,0196} \leq 0,05$

  $\Rightarrow N \geq \frac{6,63}{0,05*0,0196} \approx \frac{6,63}{0,00098} \approx 6765,3$

  Donc la plus petite variante de N est 6766.

Conclusion

«< Fin de l' Exercice 1 Partie A »>.

2 Exercice N° 02 (6 points) :

Préambule :

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée C_f, sur l'intervalle $]0;3]$;
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1;2)$;
- la droite T_B, tangente à C_f au point $B(e;e)$;

On précise par ailleurs que la tangente à T_A au point $C(3;0)$;

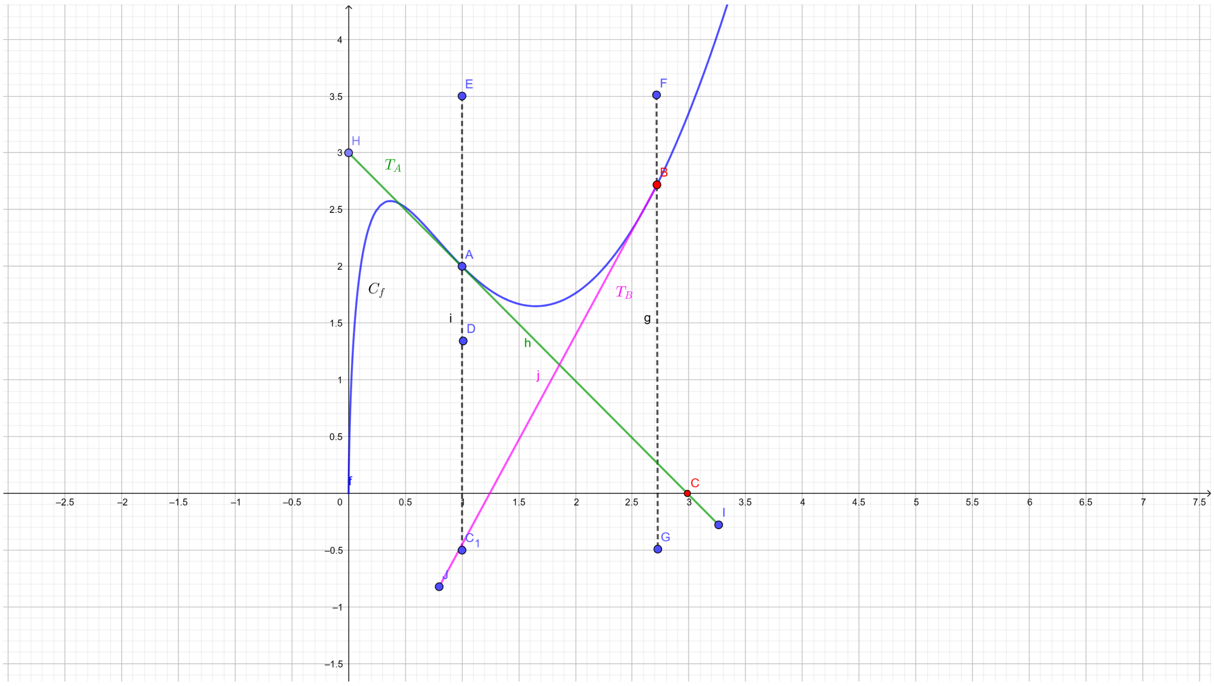


FIGURE 1 – C_f =

Partie A : Lectures graphiques

A.1-3.Enoncé

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

- Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
- Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0;3]$?
- Quel est le signe de $f''(0,2)$?

A.1-3.Solution
Procédure

- Le nombre dérivé $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A en $A(1;2)$ et $f'(1) = 1$
- Graphiquement, on observe que la courbe représentative C_f semble avoir 2 points avec une tangente horizontale sur l'intervalle $]0;3]$, ce qui signifie que la dérivée s'annule en deux points. Donc l'équation $f'(x) = 0$admet deux solutions sur $]0;3]$.
- L'axe $A_x = 0,2$, la courbe représentative C_f semble en-dessous de ses tangentes. La fonction f est donc concave. Ainsi, on a :
  $f''(0,2) < 0$

Partie B : Étude de la fonction f
On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0,+\propto[$ par :

$$f(x) = x(2(ln)^2) - 3lnx + 2$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

B-1 Enoncé :

- Résoudre dans $\Re$ l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$. En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

B-1.Solution
On résout l'équation du second degré :

- $2x^2 - 3x + 2 = 0$
- $\Delta = (-3^2) - 4 * 2 * 2 = 9 - 16 = -7$
  L'équation n'a pas de solution réelle.
  Pour avoir $f(x) = 0$, il faut :
  - $x = 0$ (hors de l'intervalle d'analyse)
  - OU $2(lnx)^2 - 3lnx + 2 = 0$
- En posant $X = ln(x)$, alors cela revient à résoudre l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$
  Cette équation n'a pas de solution réelle, donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction ne s'annule jamais.

La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

B-2 Enoncé :

- Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\propto$. On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

B-2.Solution

On étudie la limite de $f(x)$ quand $x \longrightarrow +\propto$

- On remarque que : $f(x) = x(2(lnx)^2 - 3lnx + 2) = x(lnx)^2(2 - \frac{3}{lnx} + \frac{2}{(lnx)^2})$

- On sait que :
  - $lnx \longrightarrow +\propto$
  - $\frac{3}{lnx} \longrightarrow 0$
  - $\frac{2}{(lnx)^2} \longrightarrow 0$

  Donc : $(2 - \frac{3}{lnx} + \frac{2}{(lnx)^2}) \longrightarrow 2$
  Or $x()lx) \longrightarrow +\propto$
  Ainsi, par produit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

B-3 Enoncé :

- On admet que pour tout x appartenant à $]0, +\propto[$, $f'(x) = 2(lnx)^2 + lnx - 1$
  - Montrer que pour tout X appartenant à $]0, +\propto[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4lnx + 1)$
  - Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]$ $]0, +\propto[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
  - Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]0, +\propto[$.

B-3.Solution

Procédure

- a) On nous donne $f'(x) = 2(lnx)^2 + lnx - 1$
  On dérive : $f"(x) = 2\frac{2}{x}lnx + \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}(4lnx + 1)$

- b) Le signe de $f"(x)$ est le même que $4lnx + 1$ car le facteur $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif sur $]0; +\infty[$

  Posons : $4lnx + 1 = 0 \Rightarrow lnx = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{4}}$

  Donc :
  - Pour $x < e^{-\frac{1}{4}}$, $f"(x) < 0$: La courbe est concave
  - Pour $x > e^{-\frac{1}{4}}$, $f"(x) > 0$: La courbe est convexe Le point d'inflexion à pour abscisse $e^{-\frac{1}{4}}$

- c) Avec la calculatrice, on obtient :
  - $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,78$
  - $e \approx 2,718$

  Donc $e > e^{-\frac{1}{4}}$ et $e \in \left]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[$
  Ainsi, la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $\left]e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[$
  Donc C_f est au dessus de T_B sur $[1; +\infty[$

Partie C : Calcul d'aire

C-1 Enoncé :

- Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$

C-1.Solution

Procédure

- La tangente T_B est tangente à C_f au point $B()e; e$, donc son équation est de la forme :
  $y = f'(e)(x-e) + f(e)$
- On calcule
  $f(e) = e(2(lne)^2 - 3lne + 2) = e(2-3+2) = e$ $\quad$ $f"(e) = 2(lne)^2 + lne - 1 = 2+1-1 = 2$
- Donc : $y = 2(x-e) + e = 2x - 2e + e = 2x - e$

C-2 Enoncé :

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que int

C-2.Solution

Procédure

- Intégration par parties :
  $u = lnx \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $v' = x \longrightarrow doncv = \frac{x^2}{2}$
- Alors
  $\int \mathrm{x}lnx.dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \dfrac{x^2}{2}.\frac{1}{x}.dx = \dfrac{x^2}{2}lnx - \int \dfrac{x}{2}.dx = \dfrac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$
- Donc :
  $I = \int_1^e \mathrm{x}lnx \left[\frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4}\right]_1^e$
- $Ax = e$
  $\frac{e^2}{2}.1 - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{4}$
- $Ax = 1$
  $\frac{1}{2}.0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$
- Donc :

Conclusion

C-3 Enoncé :

- On note A l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

  On admet que $I = \int_1^e \text{x}(lnx)^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$.

  En déduire la valeur exacte de A en unité d'aire.

C-3.Solution

Procédure

- On veut calculer l'aire A
  $A = \int_1^e (f(x) - (2x - e)).dx$
- On a :
  $f(x) = x(lnx)^2 - 3lnx + 2 \Rightarrow f(x) - (2x - e) = x(2lnx)^2 - 3lnx - 2 + e = x(2(lnx)^2 - 3lnx) + e$
- On écrit donc :
  $A = \int_1^e (x(2(lnx)^2 - 3lnx).dx + \int_1^e \text{e}.dx = 2\int_1^e \text{x}(lnx)^2.dx - 3\int_1^e \text{x}lnx.dx + e(e-1)$
- On admet :
  . $\int_1^e \text{x}(lnx)^2.dx = \frac{e^2-1}{4}$
  . $\int_1^e \text{x}lnx.dx = \frac{e^2+1}{4}$
- Donc :
  $A = 2.\frac{e^2-1}{4} - 3.\frac{e^2+1}{4} + e(e-1) = \frac{2(e^2-1)-3(e^2+1)}{4} + e^2 - e$
  $= \frac{2e^2-2-3e^2-3}{4} + e^2 - e = \frac{-e^2-5}{4} + e^2 - e$
  $= (e^2 - \frac{e^2}{4}) - e - \frac{5}{4} = \frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}$

$A = \frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}$

«< Fin de l' Exercice 2 Partie C »>.

3 Exercice N° 03 (4 points) :

Préambule :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $o; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}$.

A-1 Enoncé :

- On considère les points $A(-1;0;5)$ et $B(3;2;-1)$.

  Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite $AB)$ est
  $$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-t \text{ avec } t \in \Re \\ z = -1+3t \end{cases}$$

  Affirmation 2 :Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB)

A-1.Solution

Procédure

- **Affirmation 1**

  On calcule le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-0 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

  Regardons l'affirmation proposée : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-t \text{ avec } t \in \Re \\ z = -1+3t \end{cases}$

  On y lit un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

  Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et en utilisant le point $B(3;2;-1)$ on trouve bien la représentation paramétrique de (AB).

  L'affirmation 1 est donc vraie

- **Affirmation 2**

  Pour vérifier qu'un vecteur est normal au plan (AOB), il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Ici, on peut prendre :

  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  On vérifie si $\vec{n}$ est orthogonal à chacun

  $\vec{n}.\overrightarrow{OA} = 5*(1)+(-2)*0+1*5 = -5+0+5 = 0$

  $\vec{n}.\overrightarrow{OB} = 5*3+(-2)*2+1*(-1) = 15-4-1 = 10 \neq 0$

  Donc, $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB} \Rightarrow$ ce n'est pas un vecteur normal au plan (OAB).

  L'affirmation 2 est donc fausse

A-1 Enoncé :
Suite

- **Affirmation 3**
  On a :
  vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u} = (1;-1,2)$
  vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v} = (4;4,-6)$
  On cherche donc un réel λ tel que : $(1;-1;2) = \lambda(4;4;-6)$
  On teste :
  $1 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{4}$
  $-1 = 4\lambda = 1$ Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ droites d et d' ne sont pas parallèles.

  On regarde maintenant si les droites sont sécantes.
  On cherche s'il existe k et s tels que les deux droites passent par le même point.
  On pose les équations :
  $$\begin{cases} 15+k=1+4s \\ 8-k=2+4s \\ -6+2k=1-6s \end{cases}$$
  On résous les deux premières équations :
  $15+k=1+4s \Rightarrow k=-14+4s$
  $8-k=2+4s$
  On remplace k :
  $8-(-14+4s)=2+4s \Rightarrow 22-4s=2+4s \Rightarrow 20=8s \Rightarrow s=2.5$
  On en déduit $k=-14+4*2.5=-4$
  Vérifions maintenant que ces valeurs conviennent aussi pour la 3e équation
  $-6+2k=1-6s$
  Gauche $-6+2*(-4)=-6-8=-14$
  Droite $1-6*2.5=1-15–14$
  Le systéme est compatible.
  Donc les deux droites se coupent en un point $\Rightarrow$ elles sont sécantes, donc coplanaires

  L'affirmation 3 est fausse.

- **Affirmation 4**
  On cherche le point H, projeté orthogonal de C sur le plan. La droite orthogonale au plan passant par C a pour direction le vecteur normal $(1;-1;1)$, donc :
  $$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=2+ts \end{cases}$$
  On cherche t tel que ce point soit dans le plan :
  $(2+t)-(-1-t)+(2+t)+1=0 \Rightarrow 6+3t=0 \Rightarrow t=-2$
  Donc $H=(0;1;0)$
  Distance $CH = \|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

  L'affirmation 4 est vraie.

4 Exercice N° 04 (5 points) :

Préambule :

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n$$

A-1 Enoncé :

- Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle..

A-1.Solution
On cherche :
$u_1 = -0,02 * 1^2 + 1,3 * 1 = -0,02 + 1,3 = 1,28$

La superficie recouverte par la posidonie au 1er juillet 2025 est donc 1,28 ha.

A-2 Enoncé :

- On note f la fonction définie su $[0;20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$

  On admet que h est croissante sur $[0;20]$.

  a. Démontrer que pour tout entier nature $n, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$
  b. En déduire que la suite u_n converge. On note L sa limite
  c. Justifier que $L = 15$.

A-2.Solution
Procédure

- a. Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$
  Initialisation : $u_0 = 1 \in [1;20]$ et on a vue que $u_1 1,28 \geq_0$
  Héridité : supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$
  h est croissante sur $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ (admis), donc :
  $u_{n+1} = h(u_n \geq h(1) = u_1 \geq 1$ et $u_{n+1} = h(u_n \geq h(1) = -0,02 * 400 + 1,3 * 20 = -8 + 26 = 18$
  Donc $u_{n+1} \leq 20$
  Et comme $h$croissante, on a $u_{n+1} = h(u_n \geq h() u^{n-1} = u_n)$

  Conclusion la suite est croissante, majorée par 20, et $u_n \geq 1$
  .
- b. La suite est croissante et majorée, donc elle converge. On note sa limite L

- C. À la limite, on a $\lim\limits_{\longrightarrow} U_n = L$, donc :
  $L = -0,02L^2 + 1,3L \Rightarrow 0 = -0,02L^2 + 0,3L \Rightarrow 0 = l(-0,02L + 0,3) \Rightarrow L = 0 ouL = \frac{0,3}{0,02} = 15$

  Mais la suite est toujours ≥ 1 donc $L = 15$

A-3 Enoncé :

- Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

  a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

  b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

$def seuil():$
$\quad n = 0$
$\quad u = 1$
$\quad While... :$
$\qquad n = ...$
$\qquad u = ...$
$\quad Return n$

A-3.Solution

Procédure

- Le modèle est croissant, donc à partir d'un certain rang n, $u_n > 14$. Cela arrivera forcément puisque la limite est $15 > 14$.

- Complétons l'algorithme :

$def seuil():$
$\quad n = 0$
$\quad u = 1$
$\quad While u < 14 :$
$\qquad n = n + 1$
$\qquad u = -0,02 * u^{**} + 1,3 * u$
$\quad Return n$

Conclusion

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par f_t, où f est une fonction définie sur $[0, +\propto[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0, +\propto[$;
- f est dérivable sur $[0, +\propto[$;
- f est solution sur $[0, +\propto[$ de l'équation différentielle
  $(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$;

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f

.

B-1 Enoncé :

- Soit g la fonction définie sur $[0, +\propto[$; Montrer que g est solution de l'équation différentielle
  $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$

B-1.Solution

Procédure

- 1- On dérive g
  $g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{0,02f(t)(15-f(t))}{f(t}^2 = -0,02\frac{15-f(t)}{f(t)} = -0,3 + 0,02g(t)$
  Donc : $g'(t) = -0,3 + 0,02g(t) \Rightarrow g'(t) = -0,3g(t) + 0,02$

  On a bien montré que g est une solution de $(E2)$

- Tâche 2

B-2 Enoncé :

- Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2). ;

B-2.Solution

C'est une équation linéaire du 1er ordre. On peut écrire :

- Solution de l'équation homogène : $y_h(t) = Ce^{-0,3t}$

- Une solution particulière : $y_h(t) = \frac{0,02}{0,3} = \frac{1}{15}$

  Donc la solution générale est : $y_h(t) = Ce^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}$

B-3 Enoncé :

- En déduire que pour tout $t \in [0, +\propto[$;

  $f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t}} + 1$

- f est solution sur $[0, +\propto[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$;

B-3.Solution

Rappel : $g(t) = \frac{1}{f(t)} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{g(t)}$

Donc : $f(t) = \frac{1}{Ce^{-0,3t}+15} = \dfrac{15}{15Ce^{-0,3t} + 1}$

Utilisons $f(0) = 1$ pour déterminer C : $f(0) = \dfrac{15}{15C + 1} = 1 \Rightarrow 15c + 1 = 15 \Rightarrow C = \dfrac{14}{15}$

Donc : $f(t) = \dfrac{15}{14e^{-0,3t} + 1}$

B-4 Enoncé :

- Déterminer la limite de f en $+\propto$

B-4.Solution

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \frac{15}{0+1} = 15$

Donc la superficie tend vers 15 ha avec le temps, comme dans le modèle discret.

B-5 Enoncé :

- Résoudre dans l'intervalle $[0, +\propto[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

B-5.Solution

On cherche :

$f(t) > 14 \Rightarrow \frac{15}{14e^{-0,3t}+1} > 14 \Rightarrow \frac{1}{14e^{-0,3t}+1} > \dfrac{14}{15}$

On inverse (car les deux membres sont positifs) :

$14e^{-0,3t} + 1 < \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{15}{14} - 1 = \dfrac{1}{14} \Rightarrow e^{-0,3t} < \dfrac{1}{196} \Rightarrow -0,3t < ln(\frac{1}{196}) \Rightarrow t > \dfrac{-ln(\frac{1}{196})}{0,3} = \dfrac{ln(196)}{0,3}$

$ln(196) = ln(14^2) - 2ln(14) \approx 2 * 2,639 = 5,278$

$\Rightarrow t > \frac{5,278}{0,3} \approx 17,59$

Donc, au bout de 18 ans, la superficie dépassera les 14 ha.

Interprétation : D'après le modèle continu, la posidonie dépassera 14 hectares aux alentours de l'année 2042.

Référence : $\mapsto$ *https://www.sujetdebac.fr/*