Mathématiques

Les nombres complexes

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

$\mapsto$ *Documentderéférence*

1 Plan du document

2 Bases de la géométrie

Un **nombre complexe** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire tel que $1^2 = 1$.
Les nombres complexes ont été inventés à partir du XVIème siècle pour représenter les solutions d'équations qui ne possédaient pas de solutions dans $\mathscr{R}$. Par la suite, ces nombres furent de plus en plus utilisés par les mathématiciens et les physiciens, qui leur trouvèrent beaucoup d'avantages, jusqu'à devenir incontournables dans les sciences modernes.
Le nombre a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe et le nombre b la **partie imaginaire**.

3 Calcul avec des nombres complexes

3.1 Addition et soustraction

Pour **additionner** ou **soustraire** deux nombres complexes, on additionne ou soustrait séparément leurs parties réelles et imaginaires.

Exemple :
$(2+3i)+(4+5i) = 6+8i$.

3.2 Produit

Pour calculer le **produit** de deux nombres complexes, on utilise la double distributivité et la propriété $1^2 = 1$.

Exemple :
$(2+3i)+(4+5i) = 8+10i+12i+15i^2 = -7+22i$.

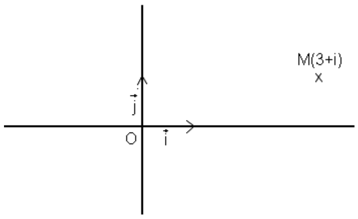
3.3 Quotient

Pour calculer le **quotient** de deux nombres complexes, on multiplie d'abord les deux nombres par le conjugué du deuxième puis on simplifie le résultat. Le **conjugué** d'un nombre complexe $a + bi$ est le nombre $a - bi$.

Exemple :
$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} \Rightarrow \frac{8-10i+12i-15i^2}{4^2-(5i)^2} \Rightarrow \frac{23+2i}{16+25} \Rightarrow \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$

4 Nombres complexes dans le plan

Comme les nombres complexes ont deux composantes (partie réelle et partie imaginaire) on peut les placer dans un repère en inscrivant la partie réelle sur l'axe des abscisses et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées.
On ne parle plus de coordonnées, mais d'**affixe**.



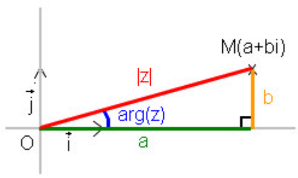
4.1 Module et argument

Le **module** d'un nombre complexe Z représenté par un point M est la distance OM.
Il est **noté** $|Z|$
Son **argument** est l'angle orienté $(\vec{i};\overrightarrow{OM}$.

Pour un nombre complexe $Z = a + bi$, on a toujours :

$$\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad et \quad \begin{cases} cos(arg(z)) = \dfrac{a}{|Z|} \\ sin(arg(z)) = \dfrac{b}{|Z|} \end{cases}$$

Ces formules proviennent du théorème de Pythagore et de la trigonométrie dans le triangle ci-dessous.



Autres écritures d'un nombre complexe

La connaissance du module et de l'argument permet d'écrire un nombre complexe sous sa forme
- **trigonométrique** :

$Z = |Z|(cos(arg Z)) + isin(arg Z))$

- ou **exponentielle**

$Z = |Z|e^{iarf(z)}$

Propriétés :

Quelques propriétés du module et de l'argument :

$|Z * Z'| = |Z| * |Z'|$

$|\frac{Z}{Z'}| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ si $Z' \neq 0$

$arg(z * z') = arg(z) + arg(z')$

$arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$ si $Z' \neq 0$

4.2 Distances et angles

Voyons maintenant deux formules qui permettent de calculer des distances et des angles dans le plan complexe.

4.2.1 Distances

SI A et B sont deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B ALORS : $AB = |Z_b - Z_A|$

4.2.2 Angle

SI de plus C et D sont deux points d'affixes respectives Z_C et Z_D, ALORS : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg(\frac{Z_D - Z_c}{Z_B - Z_A})$

5 Équation du deuxième degré

Nous avons vu en première qu'une équation du deuxième degré admet toujours 0, 1 ou 2 solutions.
SI on considère, dans le cas où delta est négatif, qu'il est possible de calculer la racine de delta en utilisant les nombres complexes,
ALORS une équation du deuxième degré admet deux solutions lorsque delta est négatif.

$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2A}$