WP-CMS

Mathématiques

Dérivées

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

$\longmapsto$ *Mémo – vecteurs, droitesetplandansl'espace*

$\longmapsto$ *Vecteurs – exercices – partie – 2*

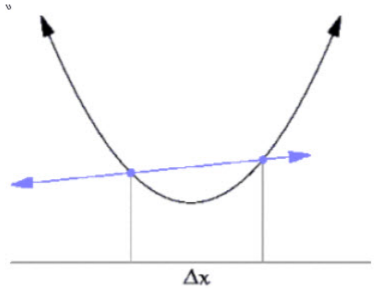
$\longmapsto$ *Vecteurs – matrice – exemple – concret*

1 Plan du document

2 Préface

La dérivée en mathématique d'une fonction d'une variable réelle mesure l'ampleur du changement de la valeur de la fonction (valeur de sortie) par rapport à un petit changement de son argument (valeur d'entrée).
Les calculs de dérivées sont un outil fondamental du calcul infinitésimal.
Par exemple, la dérivée par rapport au temps de la position d'un objet en mouvement est la vitesse (instantanée) de l'objet.

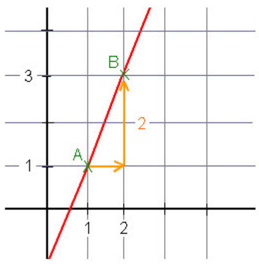
Exemple :
Ce calcul de limite revient graphiquement à rechercher la pente de la tangente à la courbe en ce point.
Ainsi, le nombre dérivé d'une fonction en un point, s'il existe, est égal à la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction en ce point.



3 Le nombre dérivés

3.1 Coefficient directeur

Pour lire le **Coefficient directeur** C de la droite [rouge], il faut :
1 - Se positionner sur la droite en $A(1;1)$ par exemple. Puis se déplacer de une unité à droite 1 par exemple.
2 - On quitte donc la droite et on regarde ensuite de combien on doit :
monter ou **descendre** pour retourner sur la droite.
Ici $\Rightarrow B(\underline{\mathbf{2}};3)$



3.2 Taux de variation

Taux de variation de $f(x)$ entre 2 points $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

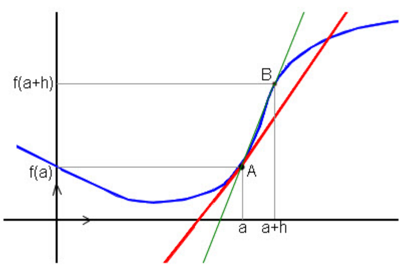
$\dfrac{3-1}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

3.3 Le nombre dérivée en un point

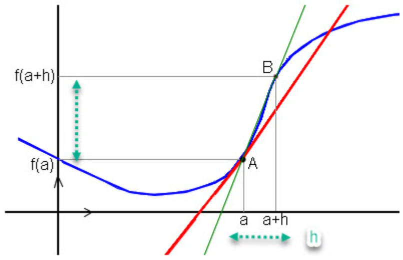
Le nombre dérivé $f'(a)$ est C $[coefficientdirecteur]$ de T $[tangente]$ à C_f $[lacourbe]$ au point a
C_f en bleu, T en rouge et C, coefficient directeur

$$C_h = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a



Connaissant C_h, nous pouvont dessiner la droite (A,B) [verte].
Cette droite n'est pas la tangente [rouge] mais elle s'en approche.



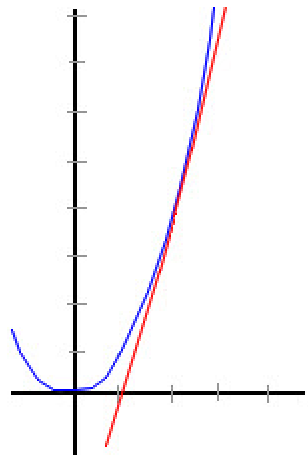
À partir de l'expression C_h nous allons donc "faire tendre" h vers 0 et alors C_h va "tendre vers" $f'(a)$.

On ne connait que $A\left(a; f(a)\right)$

donc $f'(a) = lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La droite rouge est T à la courbe. La droite verte ($\neq T$) plus h diminue plus elle se confond avec T

3.4 Utilisation de la formule : calcul du nombre dérivée pour $f x \longrightarrow x^2$



$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h}$$
$$= \frac{(4+4h+h^2)-4}{h}$$
$$= \frac{(4h+h^2)}{h} = 4+h$$

Si $h \neq 0$ mais tend vers 0 Alors $f'(2) = 4$

3.5 Équation de la tangente

Formule :
Pour une fonction f et une abscisse a donnés, la formule ci-dessous donne l'équation de la tangente à la courbe de f en a.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Procédure :

Pour calculer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a : WP-CMS
1. On calcule $f(a)$ et $f'(a)$. 2. On remplace les résultats obtenus dans la formule. 3. On développe et réduit le résultat.

Exemple :

Équation de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto^2$ en $a = 2$
1. $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$
2. $y = 4(x-2)+4$
3. $y = 4x-4$

4 Dérivation d'une fonction

La dérivation de fonction est un ensemble de techniques de calcul qui s'appliquent aux fonctions et qui permettent de connaître leurs variations, minimums et maximums.

4.1 Nombre dérivé et dérivation

Comme nous l'avons vu précédemment, le **nombre dérivé** d'une fonction en un certain x est une **mesure de la pente** de sa courbe à l'abscisse x.

Le nombre dérivé d'une f est le plus grand lorsque C de T à sa courbe est plus grand, c'est à dire lorsque T monte le plus. Ici $f'(c)$

- $f'(x) > 0$ Si $C > 0$ Alors la courbe C_f est croissante.
- $f'(x) = 0$ Si $C = 0$ Alors la courbe C_f est horizontal.
- $f'(x) < 0$ *Si* $C < 0$ *Alors la courbe* C_f *est décroissante*

4.2 Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$x \longrightarrow k$	$x \longrightarrow 0$	$]-\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow x$	$x \longrightarrow 1$	$]-\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$	$x \longrightarrow -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\, ou \,]0, +\infty[$
$x \longrightarrow x^n$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$	$\mathscr{R}^*$ si $n < 0$ $\mathscr{R}$ si $n > 0$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$	$x \longrightarrow \frac{1}{2 * \sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x \longrightarrow sin(x)$	$x \longrightarrow cos(x)$	$]-\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow cos(x)$	$x \longrightarrow -sin(x)$	$]-\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow tanx$	$x \longrightarrow 1 + tan^2 x$	$\mathscr{R}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi aveck \in \mathscr{Z}\right\}$
$x \longrightarrow e(x)$	$x \longrightarrow e(x)$	$\mathscr{R}$
$x \longrightarrow ln(x)$	$x \longrightarrow \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

4.3 Dérivées et opérations sur les fonctions

Opérations	Formules
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
$u-v$	$u'-v'$
$u*v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
lnu	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$x \longmapsto u(ax+b)$	$x \longmapsto au'(ax+b)$

5 Dérivation d'une fonction composée

5.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$.
La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on $(f \circ u)' = u'(f' \circ u)$

Exemple : Étudier la dérivabilité de la fonction $g :\longrightarrow xcos\left(\frac{1}{1-x}\right)$

- On considère les fonctions $u : x \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ et $f : x \longrightarrow cosx \Rightarrow$ on a $g = f \circ u$.
- La fonction u est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $u]-\infty;1[=]0;+\infty]$
- La fonction f est dérivable sur $\mathscr{R}$ qui contient $]0;+\infty[$
- Donc, g est dérivable sur $]-\infty;1[$
- On démontre de même que f est dérivable sur $]1;+\infty[$
- $\forall x \in \mathscr{R}\{1\}$, on a donc $g'(x) = u'(x) * f'[u(x)] = -\frac{1}{(1-x)^2} sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Remarque : Soit g une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point. Si g est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, Alors g est dérivable sur son ensemble de définition.

5.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $g : x \longrightarrow \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I
et sa dérivé est la fonction $g' : x \longrightarrow \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{2\sqrt{u(x)}}}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \longrightarrow \sqrt{x^2+1}$
- Considérons la fonction $u : x \longrightarrow x^2+1$;
- On a : $g = \sqrt{u}$
- La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathscr{R}$;
- Donc g est dérivable sur $\mathscr{R}$
- $\forall x \in \mathscr{R}$ on a : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^{+1}}}$
- On en déduit que g' est la fonction $x \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5.3 Dérivée de la fonction u^n avec $n \in \mathscr{N}$

1er cas $n > 1$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.
La fonction $g : x \longrightarrow u^n(x)$ est dérivable sur I
et sa dérivé est la fonction $g' : x \longrightarrow n * u'(x) * u^n(x)$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \longrightarrow sin^6(x)$ - La fonction sin est dérivable sur $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction cos
- Donc la fonction f est dérivable sur $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \longrightarrow 6 * cos\, x\, sin^5\, x$.

2 cas $n < 0$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I, et n un entier $(n < 0)$.
La fonction $g : x \longrightarrow u^n(x)$ est dérivable sur I
et sa dérivé est la fonction $g' : x \longrightarrow n * u'(x) * u^n(x)$

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $v\dfrac{1}{u}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{(x^2+1)^6}$

- La fonction $x \longrightarrow x^2+1$ est dérivable sur $\mathscr{R}$, ne s'annule pas sur et $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longrightarrow 2x$
- Donc la fonction f est dérivable sur $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \longrightarrow -6 * \frac{2x}{(x^2+1)^7}$.

Remarque Comme précédemment, les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels. Nous admettons momentanément le théorème suivant.

Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

1 - La fonction $x \longrightarrow x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivé est la fonction $x \longrightarrow r * u' * u^{r-1}$.

2 - La fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $r * u' * u^{r-1}$.

La seconde partie se déduit de la première à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \longrightarrow (2x^2+1^3)\sqrt{2x^2+1}$

- On a $u^{\frac{7}{2}}$, ou u est la fonction $x \longrightarrow 2x^2+1$;
- La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction $u' : x \longrightarrow 4x$
- La fonction f est donc dérivable sur $\mathscr{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par :
- $f'(x) = \frac{7}{2} * 4x(2x^2+1)^{\frac{5}{2}} = 14x(2x^2+1)^2\sqrt{2x^2+1}$.

6 Dérivation et études de fonctions

6.1 Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1 - Si $f' > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points), Alors f est strictement **croissante** sur I ;

2 - Si $f' < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points), Alors f est strictement **décroissante** sur I ;

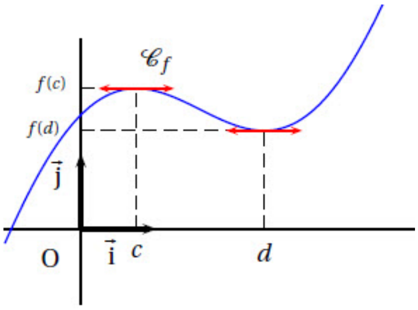
3 - Si $f' = 0$ sur I, Alors f est **constante** sur I ;

Remarque De même Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I, Alors f est **croissante** (resp. décroissante) sur I.

Exemple La fonction $f : x \longrightarrow x^2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0; +\infty]$
Donc est f strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Remarque La fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ une dérivée strictement négative sur son ensemble de définition et pourtant la fonction f n'est pas décroissante. L'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.

6.2 Extremum local



D'après la figure ci-contre :
– $f(c)$ est maximum local de f ;
– $f(d)$ est minimum local de f .
On dit également que f admet un maximum en c et un minimum en d.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. f admet un extremum local en a si et seulement si f' s'annule et change de signe en a.

7 Dérivées successives d'une fonction

Soit f une fonction et I un intervalle.
1) Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
2) Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
3) De proche en proche, la fonction dérivée n-ème de f sur I Si elle existe, est la dérivée de la fonction dérivée n-ème de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f . On utilise également, notamment en sciences physiques, la notation de Leibniz : $f', f'', ..., f^{(n)}$; sont notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, ..., \frac{d^nf}{dx^n}$

Exemple : Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$
On $f'(x) = x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 2x - 3$; $f^{(3)} = 2$ et $f^{(4)} = 0$.

Exemple : Calculer la dérivée n-ème de la fonction $g : x \longrightarrow sinx$
- On a :
$g^{(1)}(x) = cosx = sin(x + \frac{\pi}{2})$; $g^{(2)}(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sin(x + 2 * \frac{\pi}{2})$; $g^{(3)}(x) = cos\left(x + 2 * \frac{\pi}{2}\right) = sin(x + 3 * \frac{\pi}{2})$
On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathscr{N}^*$, $g^{(n)}(x) = sin\left(x + n * \frac{\pi}{2}\right)$
Démontrons cette égalité par récurrence.
1 - L'égalité est vraie pour $n = 1$.
2 - Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire : $g^{(k)}(x) = sin\left(x + k * \frac{\pi}{2}\right)$;
on en déduit que : $g^{(k)+1}(x) = cos\left(x + k * \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + (k - 1)\frac{\pi}{2}\right)$
donc, l'égalité est vraie pour $k + 1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.