π

WP-CMS

Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Fiche de synthèse

Numéro 01

$\longmapsto Document de référence$

$\longmapsto Mémo - vecteurs, droites et plan dans l'espace$

$\longmapsto Vecteurs - exercices - partie - 2$

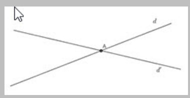
$\longmapsto Vecteurs - matrice - exemple - concret$

1 Plan du document

2 Positions relatives

2.1 Positions relatives de deux droites

- Un point appartient-t-il à une droite ?



Un point $C(x_C; y_C; z_C) \in$ à une droite (AB)

Si ces coordonnées vérifie le système d'équation paramétrique de la droite (AB).

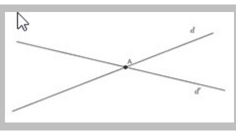
C'est à dire si en attribuant les coordonnées de C à chaque équation on trouve la même valet de l'inconnue t pour chaque équation.

- Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2 \in$ a un même plan $\mathscr{P}$ Alors elles sont **coplanaires**.

  Démonstration :

  Pour prouver que deux droites sont coplanaires il suffit de prouver qu'elles sont sécantes ou parallèles.
  Inversement pour prouver que deux droites ne sont pas coplanaires, il suffit de montrer qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

- Sécantes



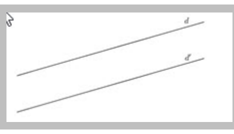
$d \cap d' = A$

$\longrightarrow d\ et\ d'$ sont sécantes en A

Si on connait leurs représentation paramétrique respectives

Alors : $\begin{cases} x_A + a_1 t = x_B + a_2 s \\ yA + b_1 t = yB + b_2 s \quad t\ ou\ s \in \Re. \\ z_A + z_1 t = z_B + z_2 s \end{cases}$

- Parallèles



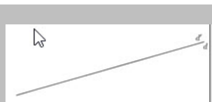
$d \cap d' = 0$

$\longrightarrow d\ et\ d'$ sont strictement parallèles

Si on connait leurs représentation paramétrique respectives

Alors : $\vec{u}\begin{pmatrix} a_d \\ b_d \\ c_d \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a_{d'} \\ b_{d'} \\ c_{d'} \end{pmatrix}$ sont proportionnelles.

- Confondues



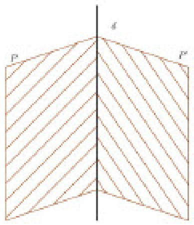
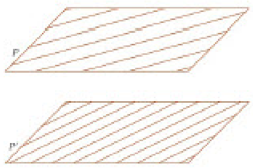
$d \cap d' = d = d'$

$\longrightarrow d\ et\ d'$ sont confondues parallèles

2.2 Positions relatives de deux Plans

Un plan peut être défini soit :

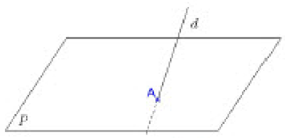
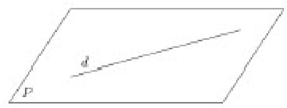
- par trois points distincts non alignés ;
- par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- par deux droites sécantes ;
- par deux droites strictement parallèles.

SÉCANTS	PARALLÈLES	
 $P \cap P' = d$ P et P' sont sécants en d.	 $P \cap P' = \emptyset$ P et P' sont (strictement) parallèles.	 $P \cap P' = P = P'$ P et P' sont confondus.

- Les deux plans sont sécants et il se coupe selon une droite. Les deux vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires car non proportionnel alors les deux plan sont sécants.
- Les deux plans sont parallèles et distincts.
- Les deux plans sont parallèles et confondues.

<u>**Note :**</u> On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$.

2.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

SÉCANTS	PARALLÈLES	
 $d \cap P = \{A\}$ d et P sont sécants en A.	 $d \cap P = \emptyset$ d et P sont (strictement) parallèles.	 $d \cap P = d$ d est incluse dans P ($d \subset P$).

- Les deux plans sont sécants et il se coupe selon une droite.
  Les deux vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires car non proportionnel alors les deux plan sont sécants.
- Les deux plans sont parallèles et distincts.
- Les deux plans sont parallèles et confondues.

<u>**Note :**</u> On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$.

3 Vecteur de l'espace

3.1 Du plan dans l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteurs :

Définition :

Soient deux points distincts A et B de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

- direction : celle de la droite (AB) ;
- sens : de A vers B ;
- longueur (ou norme) : la distance AB. On la note $\| \overrightarrow{AB} \|$ ou plus simplement AB.

Propriété N :

3.2 Vecteurs colinéaires

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$.

Propriété 1 :

Soient $A, B, CetD$ quatre points de l'espace.

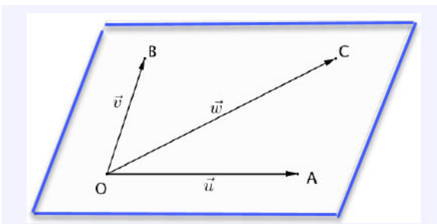
- Les points $A, BetC$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et AC sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (AC) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et AC sont **colinéaires**.

3.3 Vecteurs coplanaires

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si pour tout point quelconque O de l'espace, les points $O, A, BetC$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{OC}$ sont dans un même plan.



Propriété N :

4 Droites et plans de l'espace

4.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition :
On appelle **vecteur directeur** d'une droite d de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ non nul dont la direction est celle de la droite $\mathscr{D}$.
Si A est un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, Alors on dit que $A, \vec{u}$ est un repère de $\mathscr{D}$.

Propriété N :

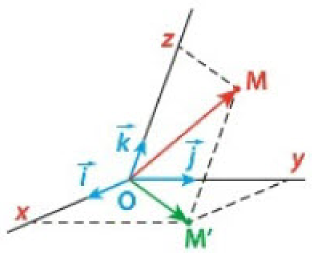
4.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, et A un point de $\mathscr{P}$.
Alors on dit que $A; \vec{u}, \vec{v}$ est un repère du plan $\mathscr{P}$ et que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de ce plan.

Propriété N :

5 Base et repérage dans l'espace

5.1 Base



- Une base de l'espace est formée par trois vecteurs non coplanaires.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
  Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Les deux plans sont parallèles et confondues.

5.2 Repère

Un repère de l'espace est un quadruplet composé d'un point O (origine du repère) et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

5.3 Coordonnées dans l'espace

Théorème :

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.

Si $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et x, $yetz$ les réels tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Alors le triplet $(x; y; z)$ représente les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans ce repère.

Si M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ Alors M a aussi pour coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère.

Propriété :

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ dans une base de l'espace et soit α un réel.

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow x = x', y = y' etz = z'$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pour coordonnées dans cette base $(x + x'; y + y'; z + z')$
- $\alpha\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$

5.4 Calcul sur les coordonnées

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour cordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, Alors
  Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$ avec $k\ in\ \mathscr{R}$
  Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$

- Si A et B ont pour cordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, Alors
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
  Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_B - x_A}{2}; \frac{y_B - y_A}{2}; \frac{z_B - z_A}{2})$

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2; (y_B - y_A)^2; (z_B - z_A^2)}$

6 Représentation d'une droite

6.1 Représentation paramétrique

Si d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur (directeur) $\vec{u}(a; b; c)$.
Alors d est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que :

Si $M \begin{cases} x = x_A \; + at \\ y = yA \; + bt \\ z = \underbrace{z}_{A} + \underbrace{c}_{\vec{u}} t \end{cases}$ $t \in \Re$. est **la représentation paramétrique de la droite** d.
Alors on peut affirmer que d passe par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et que $\vec{u}(a; b; c)$ est son vecteur directeur.

<u>**Les conditions :**</u>
Pour déterminer **un système d'équations paramétriques** de la droite (AB), Il faut

- Soit les cordonnées de $A(x_A; y_A; z_A)$ et de $B(x_B; y_B; z_B)$,
  et détermine son vecteur directeur $\overrightarrow{u_{AB}} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$
- Soit les cordonnées de $A(x_A; y_A; z_A)$ et directement sont vecteur directeur.
- $\Rightarrow$ on écrit Alors sa représentation paramétrique : $M \begin{cases} x = x_A \; + at \\ y = yA \; + bt \\ z = \underbrace{z}_{A} + \underbrace{c}_{\vec{u}} t \end{cases}$ $avec t \in \Re$.

6.2 Droites non coplanaire

Le point $C(5; 8; 9)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
$C \in (AB)$ Si les coordonnées de C vérifient le système d'équation.
C'est à dire si on trouve les mêmes valeurs de t dans les trois équations.

$$C \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = 1 - 2t \\ 8 = -1 + 4t \\ 9 = 4 - 2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t = -4 \\ 4t = 9 \\ 2t = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{9}{4} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi ce système n'a pas de Réponsse. Donc $C \notin (AB)$

7 Représentation d'un plan

7.1 Représentation paramétrique du plan

Si $\mathscr{P}$ un plan caractérisé par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\ (a, b, c)$ et $\overrightarrow{u}\ (\alpha; \beta; \gamma)$ non colinéaires.
Alors $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha t' \\ y = y_A + bt + \beta t' \\ z = z_A + ct + \gamma t' \end{cases}$$

7.2 Représentation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormal, tout plan $\mathscr{P}$ a une équation de forme :

$ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non-nuls du **vecteur normal** $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Les conditions :

- On appelle vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$
  Démontrer [...]
- Déterminer la valeur de d
  Si d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur (directeur) $\overrightarrow{u}(a; b; c)$.
  Alors l'équation cartésienne de d est de la forme :
  $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = a * (x_A) + b * (y_A) + c * (z_A)$

8 Procédures récurrentes

8.1 système d'équations paramétriques droite d_1 intersection de 2 plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

Déterminer un système d'équations paramétriques droite (d) intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
Cette procédure générale à été valider sur 10 exercices.

$$\begin{cases} 3x+2y-z+2=0 \\ 2x+2y-\frac{1}{2}z-0=0 \end{cases}$$

Pour représenter une droite il faut un système de 3 équation à 3 inconnues.
On fixe alors x, y ou z à t [En général on prend l'inconnue qui à un coefficient de 1].

$$\begin{cases} \textbf{x=t} \\ 3t+2y-z+2 \\ 2t+2y-\frac{1}{2}z \end{cases}$$

On isole une variable. Ici on à choisi Z $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\frac{1}{2}z \end{cases}$

On remplace la valeur de Z dans l'équation [3] $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\frac{1}{2}(2y+3t+2) \end{cases}$

On calcul Y $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-y-\frac{3}{2}t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\frac{4}{2}t+\frac{3}{2}t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On remplace la valeur de Y dans l'équation [2] $\begin{cases} x=t \\ z=2(-\frac{1}{2}t+1)+3t+2 \\ y=-\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On calcul Z $\begin{cases} x=t \\ z=-t+2+3t+2 \\ y=-\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ \textbf{z=2t+4} \\ y=-\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-\frac{1}{2}t \\ z=-4+2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$$