WP-CMS

Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Exercices

Numéro 01

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

$\longmapsto$ *Mémo − vecteurs,droitesetplandansl′espace*

$\longmapsto$ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

$\longmapsto$ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

Table des matières

1 Exercices 1-10 :

1.1 Exercices 01

On concidére :

- Les points $A(-1;-2;4)$ et $B(\frac{1}{2};1;-2)$

- Les plans :

$\mathscr{P}_1 : 3x+2y-z+2=0,$

$\mathscr{P}_2 : 2x+2y-\dfrac{1}{2}=0.$

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB)

2 Déterminer un système d'équations paramétriques droite (d) intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB)

$\begin{cases} x=-1+\dfrac{3}{2}t \\ y=-2-3t \\ z=-4-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$ Vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}-(-1);1-(-2);-2-(4))$

2 Déterminer un système d'équations paramétriques droite (d) intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

$$\begin{cases} 3x+2y-z+2=0 \\ 2x+2y-\dfrac{1}{2}z-0=0 \end{cases}$$

Pour représenter une droite il faut un système de 3 équation à 3 inconnues.
On fixe alors x, y ou z à t [En général on prend l'inconnue qui à un coefficient de 1].

$$\begin{cases} \mathbf{x=t} \\ 3t+2y-z+2 \\ 2t+2y-\dfrac{1}{2}z \end{cases}$$

On isole une variable. Ici on à choisi Z $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\dfrac{1}{2}z \end{cases}$

On remplace la valeur de Z dans l'équation [3] $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\frac{1}{2}(2y+3t+2) \end{cases}$

On calcul Y $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-y-\dfrac{3}{2}t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\dfrac{4}{2}t+\dfrac{3}{2}t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On remplace la valeur de Y dans l'équation [2] $\begin{cases} x=t \\ z=2(-\dfrac{1}{2}t+1)+3t+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On calcul $Z \left\{\begin{array}{l} x=t \\ z=-t+2+3t+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=t \\ \textbf{z=2t+4} \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1-\dfrac{1}{2}t \\ z=-4+2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$$

1.2 Exercices 02

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe (Oz).

2 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1;2;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par les points $A(0;5;-7)$ et $(6;-2;1)$

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe (Oz).

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$

2 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1;2;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{array}{l} x=1+4t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$

3 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par les points $A(0;5;-7)$ et $B(6;-2;1)$

$\left\{\begin{array}{l} x=6t \\ y=5-7t \\ z=-7+8t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$

Vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}=(6-(0);-2-(5);1-(-7))$

1.3 Exercices 03

1 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1;-2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ caractérisé par le point $A(5;-1;0)$

et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (CDE) où :
$C(0;1;1)$, $D(-4;2;3)$ et $E(4;-1;1)$

1 Déterminer...
$4x+5y-6z+d=0$
$d=4*(1)+5*(-2)-6*(3)+d=0 \Rightarrow 4-10-18=-24$

$4x+5y-6z+24=0$

2 Déterminer une équation cartésienne du plan (AB)
Ce plan est défini a partir de 1 point $B(5;-1;0)$ *et deux vecteurs* $\vec{u}(1;3;-2)$ *et* $\vec{v}(4;7;-1)$

A] Rappel : Un plan CDE est définit par deux vecteurs directeurs non colinéaire.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$$

Ces 2 vecteurs directeur du plan (CDE) ne sont pas proportionnels donc ne sont pas colinéaires il définissent le plan CDE.

si $\vec{u} = k\vec{v}$ k étant unique **Alors les deux vecteurs sont colinéaires** . cf. § sur la proportionnalité

B] Maintenant, il faut chercher un vecteur normal au plan.

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0$$

$$\vec{v}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 7\beta - 1\gamma = 0$$

Si $\overrightarrow{CD}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{CE}.\vec{n} = 0$ **Alors** $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ **un vecteur normal** au plan (CDE).

C] Pour résoudre un système d'équation à deux inconnues on prend arbitrairement $\gamma = 5$ dans les deux équations.

$$\begin{cases}1\alpha + 3\beta - 10 = 0\\4\alpha + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -3\beta + 10 = 0\\4(-3\beta + 10) + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -\beta + 10 = 0\\-12\beta + 40 + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -\beta + 10 = 0\\-5\beta + 35 = 0\end{cases} \begin{cases}\beta = 7\\\alpha = -11\end{cases}$$

Les coordonnée du vecteur normal à (CDE) sont $\begin{pmatrix}-11\\+7\\+5\end{pmatrix}$

L'équation cartésienne du plan (CDE) est donc de la forme : $-11x + 7y + 5z + d = 0$

D] Puisque $B \in (CDE)$ on peut écrire :

$-11 * (5) + 7 * (-1) + 5 * (0) + d = 0$
ce qui donne $D = 62$

$$-11x + 7y + 5z + 62 = 0$$

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (CDE)
Ce plan est défini a partir de 3 points $C(0;1;1)$, $D(-4;2;3)$ *et* $E(4;-1;1)$

A] Rappel : Un plan CDE est définit par deux vecteurs directeurs non colinéaire.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$
Ces 2 vecteurs directeur du plan (CDE) ne sont pas proportionnels donc ne sont pas colinéaires il définissent le plan CDE.

B] Maintenant, il faut chercher un vecteur normal au plan.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (CDE). Si $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n}=0$ et $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{n}=0$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -4\alpha+1\beta+2\gamma=0$$

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta-0\gamma=0$$

C] Pour résoudre un système d'équation à deux inconnues on prend arbitrairement $\gamma=1$.

$$\begin{cases}-4\alpha+1\beta+2=0\\4\alpha-2\beta=0\end{cases}\begin{cases}-4\alpha+1\beta+2=0\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\begin{cases}-2\beta+1\beta+2=0\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\begin{cases}\beta=2\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\begin{cases}\beta=2\\\alpha=1\end{cases}$$

Les coordonnée du vecteur normal à (CDE) sont $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
L'équation cartésienne du plan (CDE) est donc de la forme : $x+2y+z+d=0$

D] Puisque $C\in(CDE)$ on peut écrire :

$1*(0)+2*(1)+1*(1)+d=0$
ce qui donne $D=-3$

$$x+2y+z-3=0$$

1.4 Exercices 04

1 Déterminer une équation cartésienne des plans :

(a) xOy / (b) yOz / (c) xOz.

2 . Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment : $[AB]$ ou $A(-2;2;8)$ et $B(1;5;-2)$

3 On considère le plan $\mathscr{P}$ caractérisé par le point $C(3;-1;2)$ et les vecteurs

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}$

(a) vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

(b) soit $M_{(x;y;z)}$ un point de l'espace. A quelle condition $M \in$ à $\mathscr{P}$.

(c) soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$

Après avoir montré que $\overrightarrow{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, déterminer une équation cartésienne de P.

1 Déterminer...

> (a) $z=0$ / (b) $x=0$ / (c) $y=0$.

2 Pour déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ à partir de deux points $A(-3;2;8)$ et $B(1;5;-2)$ Alors il faut connaitre le point A et son vecteur directeur

A] Calculer [...]

$A\begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}-2\\7\\6\end{pmatrix}.$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-10\end{pmatrix}.$

Notre Plan médiateur P passe par I et à pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

P : 4x+6y-10z+d=0

C] On intègre les valeurs de I

$4+(-2)+3(7)-10(6)+d=0$

$-8+21-60+d=47$

> $8x+6y-20z+47=0.$

(a) Évident

Évident.

(b) $\overrightarrow{MC}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires.

$$\begin{cases} x = 3 + 2\alpha - 3\beta \\ y = -1 + \alpha - \beta \\ z = 2 - \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \text{avec } \alpha\,,\ \beta\ in\,\mathscr{R}$$

(c) ....

$4x - 6y + 2z = 22$

1.5 Exercices 05

$\mathscr{P}_1 \quad 2x-3y+6z=3$
$\mathscr{P}_2 \quad -\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-z=1$
$\mathscr{P}_3 \quad 4x-2y+z$

1 Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

2 Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$

$\mapsto Document d'aide$

Exemples :

$\mathscr{P} \quad x-3y+2z+5=0$ et $\mathscr{Q} \quad 3x-2y+6z+2=0$

– A – Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants

Rappel cette procédure ne s'applique qu'aux Plans et non aux droites

Dans l'espace 3 cas possibles :
Les 2 plans sont sécants et il vont se couper selon une droite,
Les 2 plans sont parallèle et distinct,
Les 2 plans sont parallèle et confondus.
La procédure commune est de trouver un vecteur normal de chaque plan.

Rappel : $ax+by+cz+d=0$ *donne le vecteur normal d'un plan* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ Le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{Q}$.

De manière évidente, les deux vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires car **ils ne sont pas proportionnel**.

En effet si on divise x_n par $x_{n'}$ donne $1/3$ et y_n par $y_{n'}$ donne $3/2$ et z_n par $z_{n'}$ donne $1/3$.

Ces 3 fractions ne sont pas égales donc les deux vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants.

Rappel : Si on recherche une intersection de droite ou de plan même procédure.

$$\begin{cases} x-3y+2z+5=0 \quad L1 \\ 3x-2y+6z+2=0 \quad L2 \end{cases}$$

Il faut éliminer soit $x, y\ ou\ z$.

$$\begin{cases} 0x-9y+2y+0z+13=0 \quad \color{red}{3L1-L2} \\ 3x-2y+6z+2=0 \quad L2 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ 3x-\dfrac{26}{7}+6z+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ 21x-26+42z+14 \quad en\ multiplient\ tout\ par\ 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ x=t \\ 21t-12+42z=0 \end{cases} \begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ 42z=-21t+12 \end{cases} \begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ z=-\frac{21}{12}t+\frac{12}{42} \end{cases}$$

D'où l'équation paramétrique : $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ z=-\frac{1}{2}t+\frac{2}{7} \end{cases}$

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

> Les plans sont parallèles (vecteurs normaux sont colinéaires)

2 Déterminer...

> Sécants en une droite : $\begin{cases} x=9t+3 \\ y=22t+1 \quad \text{avec } t\in \mathscr{R} \\ z=8t \end{cases}$

1.6 Exercices 06

Caractériser l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que :

1 $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x - 3y + 7z = 1 \\ -7x + 21y - 49z = -7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} -x + 3y + 7z = 3 \\ 2x - 6y - 2z = 1 \end{cases}$

$\mapsto Document01\, d'aide$ $\mapsto Document02\, d'aide$ $\mapsto Document03\, d'aide$

Exemples :

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

Intersection droite : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 7 - 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

2 Déterminer...

Les plans sont confondus : $x - 3y + 7z = 1$

3 Déterminer...

Les plans sont strictement parallèles

1.7 Exercices 07

On concidére la droite $\mathscr{D}_1$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 0-3t \\ z = 5+0t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

1 Déterminer la position $\mathscr{D}_1$ par rapport au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x - y + 3z + 10 = 0$

2 Déterminer sa position par rapport au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation : -x-y+2z=0

$\mapsto$ *Document01 d'aide*

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

1 - $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$

2 - $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$

3 - On calcul maintenant le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$:

$\vec{u}.\vec{n} = 3*(2) - 3*(-1) + 0*(3) = 0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

On en déduit que :

- Soit $\mathscr{D}_1$ est incluse dans $\mathscr{P}$

- Soit $\mathscr{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$

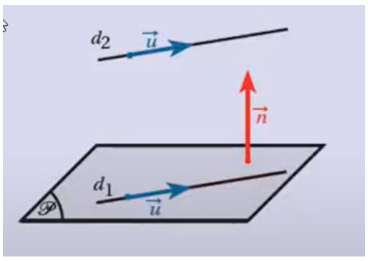

FIGURE 1 – –

4 - Soit $A(1;0;5)$ de la droite $\mathscr{D}_1$

On vérifie si les coordonnées de A vérifie l'équation cartésienne.

$2x_A - y_A + 3z_A + 10 = 2*(1) - 1*(0) + 3(5) + 10 = 2 + 15 + 10 = 0$

Si l'équation = 0 Alors A appartient au plan $\mathscr{P}$

5 - $\Rightarrow$ La droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$

Points d'intersection $M(-8;9,5)$

2 Déterminer...

1 - $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$

2 - $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$

3 - On calcul maintenant le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}$:

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 3*(-1) - 3*(-1) + 0*(2) = 0$ Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

On en déduit que :

- Soit $\mathscr{D}_1$ est incluse dans $\mathscr{P}$

- Soit $\mathscr{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$

4 - Soit $A(1;0;5)$ de la droite $\mathscr{D}_1$

On vérifie si les coordonnées de A vérifie l'équation cartésienne.

$-x_A - y_A + 2z_A = -1*(1) - 1*(0) + 2(5) = -1 + 10 = 0$

Si l'équation = 0 Alors A appartient au plan $\mathscr{P}$

5 - $\Rightarrow$ La droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$

Parallèles et $\mathscr{D}_1$est inclus dans $\mathscr{P}_1$

1.8 Exercices 08

Déterminer l'intersection :

1 De la droite $\mathscr{D}_1$ définie par $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-5t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$
avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation cartésienne $3x-2y+5z-1=0$

2 De la droite $\mathscr{D}_2$ définie par $\begin{cases} x = 2+6t \\ y = 3-t \\ z = 12 \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$
avec le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x+6y+3z-7=0$

3 De la droite $\mathscr{D}_3$ passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

avec le plan $\mathscr{P}_3$ caractérisé par le point $O(0;0;0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longmapsto$ *Document01 d'aide*

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

1 - Soit $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appliquons le produit en croix $|{}^{1}_{0}x^{0}_{3}| = 0-0=0$

$$et$$

ne sont pas colinéaire!! car proportionnel à 0!! 2 - $M \in d \bigcap P \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+5z-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

$$\begin{cases} 3(-1+3t)-2(2-5t)+5(t)-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} (-3+9t)-(4-10t)+(5t)-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8+24t=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ x=-1+3*(\dfrac{1}{3}) \\ y=2-5*(\dfrac{1}{3})t \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{36} \end{cases}$$

Point d'intersection $M(0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3})$

2 Déterminer...

Strictement parallèles

3 Déterminer...

1 - Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

2 - $M \in d \bigcap P \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

$$\begin{cases} 3(-1+3t) - 2(2-5t) + 5(t) - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} (-3+9t) - (4-10t) + (5t) - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 24t = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = -1 + 3 * (\dfrac{1}{3}) \\ y = 2 - 5 * (\dfrac{1}{3})t \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{36} \end{cases}$$

Point d'intersection $M(-2; 0; 2)$

1.9 Exercice 09

- **EXO 09-01**

Justifier position relative des droites

D_1 définie par $\begin{cases} x = 5+3t \\ y = 2+t \\ z = 1-4t \end{cases}$

$D_{D'}$ définie par $\begin{cases} x = 2t'-11 \\ y = 10-2t' \\ z = 4+t' \end{cases}$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $3x-2y+5z-1=0$

> $\Rightarrow$ Sécante et coplanaire. Point d'intersection $M(-1;0;9)$.

1.10 Exercice 10

- **EXO 10-01**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 7+4t \end{cases}$ et de D_2 définie par $\begin{cases} x = -5-t \\ y = 6+\frac{2}{2}t \\ z = 2-2t \end{cases}$

> $\Rightarrow$ Strictement parallèles..

- **EXO 10-02**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 7+4t \end{cases}$ et de D_3 définie par $\begin{cases} x = 4+t \\ y = -6-3t \\ z = 21+2t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Sécante en $M(1;3;15)$.

- **EXO 10-03**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 7+4t \end{cases}$ et de D_4 définie par $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2 \\ z = 7-5t \end{cases}$

⇒ Ni parallèles ni sécantes donc non coplanaires.

- **EXO 10-04**

  Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

  De D_1 définie par $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 7+4t \end{cases}$ et de D_5 définie par $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2+\dfrac{3}{2}t \\ z = 19-6t \end{cases}$

⇒ Droites confondues.

---

2 Exercices 11-20

2.1 Exercice 11

- **EXO 11-01**

  La droite (AB) où $A(-1;6;-1)$ et $B(2;3;5)$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 4+t \\ z = 3-2t \end{cases}$

  > ⇒ Vrai..

- **EXO 11-02**

  La droite d'intersection des plans d'équations $2x+4y-z-2=0$ et $y-z+3=0$
  admet pour système d'équations paramétrique : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}+3t \\ y = -2+2t \\ z = 1+2t \end{cases}$

  > ⇒ Faux.

- **EXO 11-03**

  On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+2y-z-11=0$et C le point de coordonnées $(1;0;-2)$.
  Alors $D(3;2;-1)$ est le projeté orthogonal de C dans le plan $\mathscr{P}$
  ⇒ Faux.

  > ⇒ Faux.

- **EXO 11-04**

  Les points $E(2;4;1)$, $F(0;4;-3)$ et $G(3;1;-3)$ appartiennent à un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  ⇒ Vrai.

  > ⇒ Vrai

- **EXO 11-05**

  La droite (CG) pour représentation paramétrique le système suivant : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = -1-t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vrai.

2.2 Exercice 12

- **EXO 12-01**
  Soit ABCDEFGH un cube de coté 1 et $()A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ est un repère orthonormé de l'espace.
  Calculer le volume du tétraèdre$BCDG$

  $\Rightarrow V = \frac{1}{6}UA.$

- **EXO 12-02**
  Calculer l'aire du triangle BDG.

  $\Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **EXO 12-03**
  On appelle distance du point Ω au plan $\mathscr{P}$ la plus petite distance ΩM avec M un point du plan $\mathscr{P}$, elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $\mathscr{P}$.
  Calculer la distance du point C au plan (BDG)

  $\Rightarrow CH' = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- **EXO 12-04**
  Déterminer une équation cartésienne du plan (BDG)

  $\Rightarrow -x-y+z+1$

2.3 Exercice 13

L'espace est muni du repère orthonormal $O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}$
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes.

PARTIE A

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $6x+3y-2z-6=0$

- **EXO 13-A01**

  Étudier la position relative des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

  $\Rightarrow$ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.

  $\Rightarrow -x-y+z+1$

- **EXO 13-A02**

  Établir un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

  $$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3}t-2 \\ y=\frac{8}{3}t+6 \\ z=t \end{cases}$$

- **EXO 13-A03**

  Vérifier, pour tout point $M(x;y;z)$, l'équivalence.

  $M(x;y;z)\in\mathscr{P}\bigcap\mathscr{P}' \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=5t+3 \\ y=-8t-2 \\ z=3t+3 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires et $N(3;-2;3)$

PARTIE B

On considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;-3)$

Soit $\mathscr{P}''$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$

- **EXO 13-B01**

  Soit $M()x;y;z$ un point de l'espace.

  Établir que $M\in(AB)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires donc il existe $t\in\mathscr{R}$

- **EXO 13-B02**
  Après avoir montré que la droite (AB) et la plan $\mathscr{P}''$ sont sécants, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

> $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} \neq 0$ d'où (AB) et $\mathscr{P}''$ sont sécants $I(-2;6;0)$

- **EXO 13-B03**
  Montrer que la droite (BC) coupe le plan $\mathscr{P}''$ au point $J(O;2,8,1,2)$.

> $\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n} \neq 0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\mathscr{P}''$ sont sécants $J(0;\frac{14}{5});\frac{6}{5})$

- **EXO 13-B04**
  Vérifier que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire au vecteur

> $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.
>
> $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = 0,4\overrightarrow{v}$
>
> .

- **EXO 13-B05**
  Démontrer que les points $A, B\ et\ C$ forment un plan.

> $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc les points $A, BetC$ forment un plan.

- **EXO 13-B06**
  Caractériser l'intersection des plans (ABC) et $\mathscr{P}''$

> $\Rightarrow$ L'intersection est la droite $()IJ$.

2.4 Exercice 14

- **EXO 14-01**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -1-4t \\ y = 1+2t \\ z = 5+2t \end{cases}$

On donne les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;-3;1)$ Déterminer une représentation paramétrique de la droite AB.

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+1 \\ z = -t \end{cases}$.

- **EXO 14-02**

Les droites $\mathscr{D}$ et AB sont-elles coplanaires

⇒ Les vecteurs directeurs sont colinéaires donc les droites sont coplanaires..

- **EXO 14-03**

Le point C appartient-il à la droite $\mathscr{D}$.

$\Rightarrow C \in \mathscr{D}$

.

2.5 Exercice 15

- **EXO 15-01**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 3-2t \end{cases}$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(2;3;-1)$ sur la droite $\mathscr{D}$.

$\Rightarrow H(\frac{11}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{2})$

2.6 Exercice 16

- **EXO 16-01**

Préciser la nature géométrique de l'ensemble défini par : $S \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1;0;-2)$.

2.7 Exercice 17

- **EXO 17-01**

Dans un repère $O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ est une base des vecteurs de l'espace.

$\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas coplanaires d'où le résultat..

- **EXO 17-02**

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
