WP-CMS

Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Exercices

Numéro 02

⟼ *Documentderéférence*

⟼ *Mémo − vecteurs, droitesetplandansl′espace*

⟼ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

⟼ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

1 Plan du document

2 Représentation paramétrique d'une droite :

Enoncé :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$. On considère les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$.

- [1] Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
- [2] Le point $C(5;8;9)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
- [3] La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique.
$$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 7-8t \qquad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = 4t \end{cases}$$
- [4] Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Réponsse :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$. On considère les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$.

[1] Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Rappel :

$$M\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \in D(A;\vec{u}) \longrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{ct}_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$$

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

Donc la droite (AB) est définit par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

- Calcul du point A : $A \rightarrow (1;-1;4)$

- Calcul du vecteur directeur$\overrightarrow{AB}$: $AB(-1-(1);3-(-1);2-(4))$ soit $(-2;4;-2)$

La droite (AB) passe par le point $A\begin{cases} 1 \\ -1 \\ 4 \end{cases}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{cases} -2 \\ 4 \\ -2 \end{cases}$

La représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+4t \quad ou \quad t \quad \in \quad \Re \\ z = 4-2t \end{cases}$

[2] Le point $C(5;8;9)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.

Rappel :

$C \in (AB)$ Si les coordonnées de C vérifient le système d'équation.

C'est à dire si on trouve les mêmes valeurs de t dans les trois équations.

$$C \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = 1 - 2t \\ 8 = -1 + 4t \\ 9 = 4 - 2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t = -4 \\ 4t = 9 \\ 2t = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{9}{4} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi ce système n'a pas de Réponsse. Donc $C \notin (AB)$

Réponsse N°03 :

[3] La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 8t \qquad ou \quad t \in \Re \\ z = 4t \end{cases}$$

Rappel :

- On voit que le système à les caractéristiques de la représentation d'une droite.
- On regarde si le point $A \in (AB)$ en remplaçant ces coordonnée dans le système. Si le système est vérifié alors le point $A \in (AB)$ rappel : $A(1;-1;4)$.
- On regarde si le point $B \in (AB)$ en remplaçant ces coordonnée dans le système. Si le système est vérifié alors le point $B \in (AB)$ rappel : $B(-1;3;2)$..

Résolvons pour A : $\begin{cases} 1 = -3 + 4t \\ -1 = 7 - 8t \\ 4 = 4t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4t = 4 \\ 8t = 8 \\ t = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \in (AB)$

Résolvons pour B : $\begin{cases} -1 = -3 + 4t \\ 3 = 7 - 8t \\ 2 = 4t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4t = 2 \\ 8t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B \in (AB)$

Les coordonnées de A et B vérifient le système. Donc ce système est bien une représentation paramétrique de (AB)

Réponsse N°04 :

[4] Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Rappel :

Si les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$ alors le vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}(-2;4;-2)$ [coordonnées de B-A].

rappel : $C(5;8;9)$

La droite Δ passe. $C\begin{cases} 5 \\ 8 \\ 9 \end{cases}$ et à pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{cases} -2 \\ 4 \\ -2 \end{cases}$ puisque (AB) est parallèle à Δ.

Donc Δ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = 8 + 4t \\ z = 9 - 2t \end{cases} \quad ou \quad t \in \Re$

Retour au sommaire 1

3 Comment savoir si 2 droites sont parallèles, sécantes ou non coplanaires :

Enoncé :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.
On considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques :

$$D_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad ou \quad t \in \Re \qquad D_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -4 - 3s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad ou \quad s \in \Re$$

- [1] D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Justifier.
- [2]D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

Réponsse N°01 :

[2] D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

Rappel :

2 droites peuvent être
- *coplanaires*
  - *paralléles*
  - *sécantes*
- *noncoplanaires*

Une droite admet une représentation paramétrique de la forme $D : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{ct}_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$
Deux vecteurs directeurs sont colinéaire si leurs coordonnées sont proportionnelles.

On cherche un vecteur directeur de chaque droite. Si colinéaire les droites sont parallèles.

$\overrightarrow{D_1} \begin{cases} 1 \\ -3 \\ -3 \end{cases}$ et $\overrightarrow{D_2} \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 1 \end{cases}$ sont deux vecteur directeurs respectifs de D_1 et D_2.

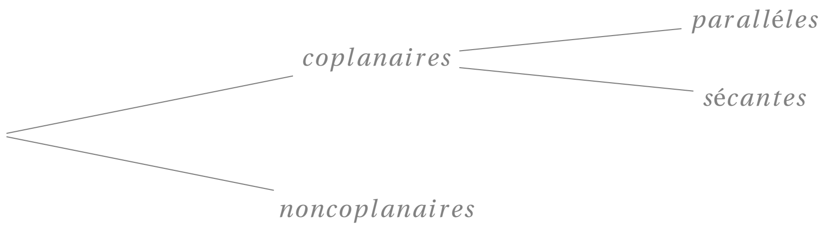
Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles
(en effet, si on multiplie l'élément y de D_1 par -1 les deux élément sont proportionnelle mais les éléments x et z ne le sont pas).

> D_1 et D_2 ne sont pas parallèle.

Réponsse N°02 :

[2] D_1 et D_2 sont-elles sécantes? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

Rappel :



2 droites peuvent être

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$

Deux vecteurs directeurs sont colinéaire si leurs coordonnées sont proportionnelles.

D_1 et D_2 ne sont pas parallèle mais elles peuvent être sécantes ou coplanaires?

- Si les coordonnées d'un point $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ vérifie le système D_1 alors ce point est sur la droite D_1

- Si les coordonnées d'un point $\begin{cases} x = 2s \\ y = -4 + 3s \\ z = --1 + s \end{cases}$ vérifie le système D_2 alors ce point est sur la droite D_2

Ensuite on va chercher un point qui vérifie les deux systèmes.

Pour cela on cherche s et t pour avoir le même $x; y; z$. (E) $\begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -3 - 3t = -1 + s \end{cases}$

Pour résoudre ce système on doit d'abord éliminer soit t ou soit s.

$$\begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -3 - 3t = -1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -1 = -3 + 2s[L2 - L3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2 \\ -4 - 3t = -1 \\ s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Le système E ayant pour solution $s = 1$ et $t = -1$, D_1 et D_2 sont sécantes.

4 Géométrie dans l'espace et Physique : vitesse et déplacement : WP-CMS

Enoncé :

On observe deux sous-marins se déplaçant chacun en ligne droite et à vitesse constante. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$. dont l'unité est le mètre.

Le plan $r$eprésente la surface de la mer.

La cote z est nulle au niveau de la mer et négative sous l'eau.

A chaque instant $t \geq 0$, exprimé en minute, le premier sous-marin est repéré par le point

$$S_1(t) \text{ de coordonnées } \begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

- [1] Déterminer la *vitesse* du premier sous-marin.
- [2] On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire de ce sous-marin avec le plan horizontal. On arrondira à 0,1 degré près.
- [3] A chaque instant $t \geq 0$, le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$

  On sait que $S_2(0)$ et $S_2(3)$ ont pour coordonnées respectives $(68; 135; -68)$ et $(-202; -405; -248)$

  A quel instant t exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

Réponsse N°01 :

[2] Déterminer la vitesse du premier sous-marin.

- la vitesse $V = \frac{d}{T}$ d = distance de A à B.

  Coordonnée du sous marin 1 à l'instant $t = 0$ et $t = 1$ minute

  $S_1(0) \begin{cases} 140 \\ 105 \\ -170 \end{cases}$ $S_1(1) \begin{cases} 80 \\ 15 \\ -200 \end{cases}$ Note : données de $S_1(t)$

- $S_1(0)S_1(1) = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = \sqrt{12600} \approx 112.$

  En km/h : $112 * \frac{60}{1000} = 16,7$ km/h.

  Rappel : Dans un repère orthonormé $A \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$ $B \begin{cases} a' \\ b' \\ c' \end{cases}$ $AB = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}$

La vitesse du sous marin 1 est de 16,7 km/h.

Réponsse N°02 :

[2] On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire de ce sous-marin avec le plan horizontal. On arrondira à 0,1 degré près.

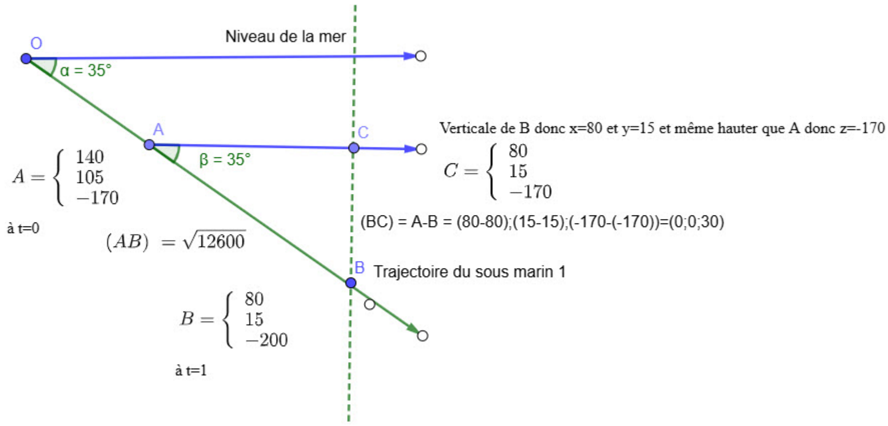


FIGURE 1 – $C_f = x(2(lnx)^2 - 3ln(x) + 2)$

Dans le triangle rectangle $\widehat{ABC}$, on connait l'hypoténuse et le coté opposé

Donc $\sin\alpha = \dfrac{30}{\sqrt{12600}} \approx 0,2672$

Ainsi $\alpha \approx 15,5$ř [Par la calculette en degré on calcule Arc sinus]

$\alpha \approx 15,5°$.

Réponsse N°03 :

[2] A chaque instant $t \geq 0$, le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$

On sait que $S_2(0)$ et $S_2(3)$ ont pour coordonnées respectives $(68;135;-68)$ et $(-202;-405;-248)$

A quel instant t exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

La profondeur est représentée par l'axe Z

- A l'instant $t = 0$ le sous marin 2 se trouve = $z = -68$
- A l'instant $t = 3$ le sous marin 2 se trouve = $z = -248$

Donc le sous marin 2 descend de 180 m en 3 minutes $[-248 - (-68) = -180]$

C'est à dire de -60 m en 1 minute $[\dfrac{-180}{3}]$.

Ce qui donne l'équation $z_2(t) = -68 - 60t$ [-68 ⟶ instant 0 et -60t ⟶ la descente par minute].

Les deux sous marins seront à la même hauteur :

Il faut résoudre l'équation : $-68 - 60t = -170 - 30t \Leftrightarrow 30t = 102 \Leftrightarrow t = 3,4$

Les sous marin seront à la même profondeur à $t \approx 3,4$ minutes.

5 Volume d'un tétraèdre et comment utiliser GEOGEBRA

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On concidére les points : $A(-1;1;0)$, $B(6;-5;1)$, $C(1;2;-2)$ et $S(13;37;54)$

1 Réaliser les 3 points suivants :

- a Justifier que les points A, B, C définissent bien un plan.

- b Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- c En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC).

2 Réaliser les 2 points suivants :

- a Déterminer la nature du triangle ABC

- b Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unité d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$.

3 - a Prouver que les points $A, B, CetS$ ne sont pas coplanaires.

- b La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

Donner en une représentation paramétrique.

- c (Δ) coupe le plan (ABC) passant par le point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

4 Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\frac{Airedelabasexlahauteur}{3}$.

$\mapsto Vidéo-de-référence$

1 Réaliser les 3 points suivants :

- A) Justifier que les points A, B, C définissent bien un plan.

Pour cela il faut démontrer que deux vecteurs du plan ABC sont **non colinéaires**.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vérifions la proportionnalité : Coordonnées croisées $7*3 \neq -4*2$ donc ces vecteurs ne sont pas proportionnel donc non colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non proportionnelles donc les points A, B, C ne sont pas alignés donc ABC forment un plan.

- B) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Pour cela il faut démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaire du plan ABC.On calcul les produits scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix} = 35-64+29 = 64-64 = 0$: $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien orthogonaux.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = 10+48-58 = 58-58 = 0$ $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien orthogonaux.

Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs <u>non colinéaire</u> de (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est normal à (ABC).

- C) En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC).

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}$ est normal à (ABC) donc (ABC) admet une équation cartésienne

de la forme : $ax+by+cz+d=0 \Rightarrow 5x+16y+29z+d=0$ avec $d \in \mathscr{R}$

Or $A(-1;-1;0) \in (ABC) \Leftrightarrow 5x_A+16y_A+29z_A+d=0$

$\Leftrightarrow -5-16+d=0 \Leftrightarrow d=21$

Donc le plan (ABC) admet l'équation cartésienne : $\Rightarrow 5x+16y+29z+21=0$**.**

2 Réaliser les 2 points suivants :

- A) Déterminer la nature du triangle ABC

Pour cela il faut démontrer que le triangles est soit rectangle, soit isocèle ou équilatéral.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}.$

On est dans un repère orthonormé donc :

$AB = \sqrt{49+16+1} = \sqrt{66}$ $AC = \sqrt{44+9+4} = \sqrt{17}$ $BC = \sqrt{25+49+9} = \sqrt{83}$

Selon le théorème réciproque de Pythagore

$\begin{pmatrix} BC^2 = 83 \\ AB^2+AC^2 = 66+17 = 83 \end{pmatrix}$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

- B) Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unité d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

ABC est rectangle en A : $(ABC) = \dfrac{AB*AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66}-\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$

Donc Aire $(ABC) = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$**.**

- A) Prouver que les points $A, B, CetS$ ne sont pas coplanaire.

Montrons que $S \notin (ABC)$

$S = \begin{pmatrix} 13 \\ 37 \\ 54 \end{pmatrix}$

$5x_s + 16y_s + 29z_s + 21 = 2244 \neq 0$

Donc $S \notin (ABC)$

- B) La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

Donner en une représentation paramétrique.

La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est directeur de la droite Δ

Donner en une représentation paramétrique.

$$\Delta \begin{cases} x = 13 \ +5t \\ y = 37 \ + 16t \\ z = \underbrace{54}_{S} + \underbrace{29}_{\overrightarrow{n}} t \end{cases} \quad avect \in \Re.$$

- C) (Δ) coupe le plan (ABC) passant par le point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

$$\Delta \begin{cases} x = 13 \ +5t \\ y = 37 \ + 16t \\ z = \underbrace{54}_{S} + \underbrace{29}_{\overrightarrow{n}} t \end{cases}$$

On résoud l'équation :

$5(13 + 5t) + 16(37 + 16t) + 29(54 + 29) + 21 = 0 \Leftrightarrow (25 + 256 + 841)t + 65 + 592 + 1566 + 21$

$1122t + 2244 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2244}{1122} \Leftrightarrow t = -2$

On remplace t par sa valeur : $H \begin{cases} x = 13 - 10 \\ y = 37 - 10 \\ z = 54 - 58 \end{cases}$

$H = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ **Voir geogebra**

4 Réaliser le point suivant :

- Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$.

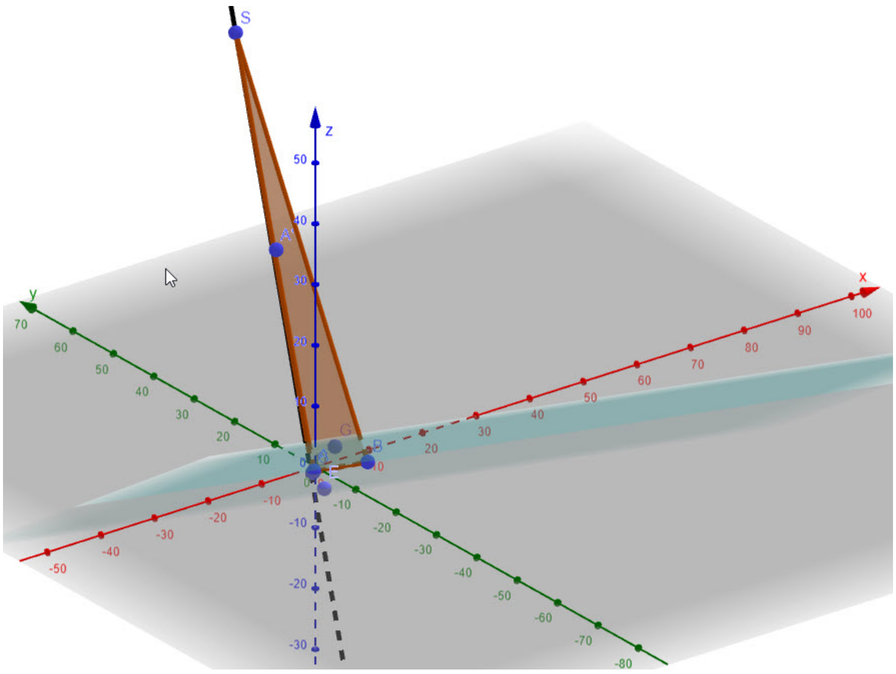
Base : $ABC \Rightarrow$ Aire $(ABC) = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$

H est la projetée de S sur (ABC) donc la hauteur $= SH$

$S\begin{pmatrix} 13 \\ 37 \\ 54 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 58 \end{pmatrix}$ $HS = \sqrt{10\sqrt{2} + 32^2 + 58^2} = \sqrt{4 * 1122} = 2\sqrt{1122}$

Le volume : $\dfrac{\sqrt{1122} * 2\sqrt{1122}}{2 * 3} = \dfrac{1122}{3} = 374$ Voir geogebra



Procédure :

Saisir dans geogebra

$A = point(-1,-1,0), B = point(6,-5,1), C = point(1,2,-2) et S = point(13,37,54)$

$p : Plan(A,C,B)$ **donne** Équation cartésienne $-5x - 16y - 29z = 21$. Voir geogebra

Vecteur normal au plan ABC $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$. Voir geogebra

$A' = Translation(A, v)$ donne $= (4,15,29)$

$u = Vecteur(A, A')$ donne $\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$

$f = Segment(B, A)$ donne $= 8,12$

$g = Segment(A, C)$ donne $= 4,12$

$a = Segment(C, B, t1)$ donne $= 9,11$

$b = Segment(A, C, t1)$ donne $= 4,12$

$c = Segment(B, A, t1)$ donne $= 8,12$

$t1 = Polygone(B, A, C)$ donne $= 16,75$

$h : Perpendiculaire(S, p)$ donne $= X = (13,37,54) + \gamma(-5,-16,-29)$

$D = Intersection(h, p)$ **donne** $= (3,5,-4)$ **Coordonnées de H**

$l = Pyramide(A,B,C,S)$ **donne** $= 374$ **Volume du tétraèdre**