π

WP-CMS

Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Exercices

Numéro 01

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

$\longmapsto$ *Mémo − vecteurs, droitesetplandansl′espace*

$\longmapsto$ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

$\longmapsto$ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

Table des matières

1 Exercices 1-10 :

1.1 Exercices 01

On concidére :

- Les points $A(-1;-2;4)$ et $B(\frac{1}{2};1;-2)$

- Les plans :

$\mathscr{P}_1 : 3x+2y-z+2=0,$

$\mathscr{P}_2 : 2x+2y-\dfrac{1}{2}=0.$

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB)

2 Déterminer un système d'équations paramétriques droite (d) intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB)

$\begin{cases} x = -1+\dfrac{3}{2}t \\ y=-2-3t \\ z=-4-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$ Vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}-(-1);1-(-2);-2-(4))$

2 Déterminer un système d'équations paramétriques droite (d) intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

$$\begin{cases} 3x+2y-z+2=0 \\ 2x+2y-\dfrac{1}{2}z-0=0 \end{cases}$$

Pour représenter une droite il faut un système de 3 équation à 3 inconnues.
On fixe alors x, y ou z à t [En général on prend l'inconnue qui à un coefficient de 1].

$$\begin{cases} \textbf{x=t} \\ 3t+2y-z+2 \\ 2t+2y-\dfrac{1}{2}z \end{cases}$$

On isole une variable. Ici on à choisi Z $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\dfrac{1}{2}z \end{cases}$

On remplace la valeur de Z dans l'équation [3] $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-\frac{1}{2}(2y+3t+2) \end{cases}$

On calcul Y $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ 2t+2y-y-\dfrac{3}{2}t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\dfrac{4}{2}t+\dfrac{3}{2}t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=2y+3t+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On remplace la valeur de Y dans l'équation [2] $\begin{cases} x=t \\ z=2(-\dfrac{1}{2}t+1)+3t+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}t+1 \end{cases}$

On calcul Z $\begin{cases} x = t \\ z = -t+2+3t+2 \\ y = -\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ \mathbf{z=2t+4} \\ y = -\frac{1}{2}t+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-\frac{1}{2}t \\ z = -4+2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathscr{R}$$

1.2 Exercices 02

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe (Oz).

2 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1;2;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par les points $A(0;5;-7)$ et $(6;-2;1)$

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe (Oz).
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = t \end{cases}$

2 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1;2;-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+2t \quad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = -3-t \end{cases}$

3 Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par les points $A(0;5;-7)$ et $B(6;-2;1)$
$\begin{cases} x = 6t \\ y = 5-7t \quad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = -7+8t \end{cases}$
Vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (6-(0);-2-(5);1-(-7))$

1.3 Exercices 03

1 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1;-2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ caractérisé par le point $A(5;-1;0)$

et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (CDE) où :
$C(0;1;1)$, $D(-4;2;3)$ et $E(4;-1;1)$

1 Déterminer...
$4x+5y-6z+d=0$
$d=4*(1)+5*(-2)-6*(3)+d=0 \Rightarrow 4-10-18=-24$

$$4x+5y-6z+24=0$$

2 Déterminer une équation cartésienne du plan (AB)
Ce plan est défini a partir de 1 point $B(5;-1;0)$ *et deux vecteurs* $\vec{u}(1;3;-2)$ *et* $\vec{v}(4;7;-1)$

A] Rappel : Un plan CDE est définit par deux vecteurs directeurs non colinéaire.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$$

Ces 2 vecteurs directeur du plan (CDE) ne sont pas proportionnels donc ne sont pas colinéaires il définissent le plan CDE.

si $\vec{u} = k\vec{v}$ k étant unique **Alors les deux vecteurs sont colinéaires** . cf. § sur la proportionnalité

B] Maintenant, il faut chercher un vecteur normal au plan.

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0$$

$$\vec{v}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 7\beta - 1\gamma = 0$$

Si $\overrightarrow{CD}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{CE}.\vec{n} = 0$ **Alors** $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ **un vecteur normal** au plan (CDE).

C] Pour résoudre un système d'équation à deux inconnues on prend arbitrairement $\gamma = 5$ dans les deux équations.

$$\begin{cases}1\alpha + 3\beta - 10 = 0\\4\alpha + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -3\beta + 10 = 0\\4(-3\beta + 10) + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -\beta + 10 = 0\\-12\beta + 40 + 7\beta - 5 = 0\end{cases} \begin{cases}+1\alpha = -\beta + 10 = 0\\-5\beta + 35 = 0\end{cases} \begin{cases}\beta = 7\\\alpha = -11\end{cases}$$

Les coordonnée du vecteur normal à (CDE) sont $\begin{pmatrix}-11\\+7\\+5\end{pmatrix}$

L'équation cartésienne du plan (CDE) est donc de la forme : $-11x + 7y + 5z + d = 0$

D] Puisque $B \in (CDE)$ on peut écrire :

$-11 * (5) + 7 * (-1) + 5 * (0) + d = 0$
ce qui donne $D = 62$

$$-11x + 7y + 5z + 62 = 0$$

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (CDE)

Ce plan est défini a partir de 3 points $C(0;1;1)$, $D(-4;2;3)$ *et* $E(4;-1;1)$

A] Rappel : Un plan CDE est définit par deux vecteurs directeurs non colinéaire.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$

Ces 2 vecteurs directeur du plan (CDE) ne sont pas proportionnels donc ne sont pas colinéaires il définissent le plan CDE.

B] Maintenant, il faut chercher un vecteur normal au plan.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (CDE). Si $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n}=0$ et $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{n}=0$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -4\alpha+1\beta+2\gamma=0$$

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta-0\gamma=0$$

C] Pour résoudre un système d'équation à deux inconnues on prend arbitrairement $\gamma=1$.

$$\begin{cases}-4\alpha+1\beta+2=0\\4\alpha-2\beta=0\end{cases}\quad\begin{cases}-4\alpha+1\beta+2=0\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\quad\begin{cases}-2\beta+1\beta+2=0\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\quad\begin{cases}\beta=2\\\alpha=\frac{1}{2}\beta\end{cases}\quad\begin{cases}\beta=2\\\alpha=1\end{cases}$$

Les coordonnée du vecteur normal à (CDE) sont $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

L'équation cartésienne du plan (CDE) est donc de la forme : $x+2y+z+d=0$

D] Puisque $C\in(CDE)$ on peut écrire :

$1*(0)+2*(1)+1*(1)+d=0$

ce qui donne $D=-3$

$$x+2y+z-3=0$$

1.4 Exercices 04

1 Déterminer une équation cartésienne des plans :
(a) xOy / (b) yOz / (c) xOz.

2 . Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment : $[AB]$ ou $A(-2;2;8)$ et $B(1;5;-2)$

3 On considère le plan $\mathscr{P}$ caractérisé par le point $C(3;-1;2)$ et les vecteurs
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
(a) vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
(b) soit $M_{(x;y;z)}$ un point de l'espace. A quelle condition $M \in$ à $\mathscr{P}$.
(c) soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
Après avoir montré que $\overrightarrow{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, déterminer une équation cartésienne de P.

1 Déterminer...

(a) $z = 0$ / (b) $x = 0$ / (c) $y = 0$.

2 Pour déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ à partir de deux points $A(-3;2;8)$ et $B(1;5;-2)$ Alors il faut connaitre le point A et son vecteur directeur

A] Calculer [...]

$A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$

Notre Plan médiateur P passe par I et à pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$
P : 4x+6y-10z+d=0

C] On intègre les valeurs de I
$4 + (-2) + 3(7) - 10(6) + d = 0$
$-8 + 21 - 60 + d = 47$

$8x + 6y - 20z + 47 = 0.$

(a) Évident

Évident.

(b) $\overrightarrow{MC}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires.

$$\begin{cases} x = 3 + 2\alpha - 3\beta \\ y = -1 + \alpha - \beta \\ z = 2 - \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \text{ , } \beta \; in \; \mathscr{R}$$

(c) ....

$4x - 6y + 2z = 22$

1.5 Exercices 05

$\mathscr{P}_1 \quad 2x - 3y + 6z = 3$
$\mathscr{P}_2 \quad -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 1$
$\mathscr{P}_3 \quad 4x - 2y + z$

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

2. Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$

$\longmapsto Document d'aide$

Exemples :

$\mathscr{P} \quad x - 3y + 2z + 5 = 0$ et $\mathscr{Q} \quad 3x - 2y + 6z + 2 = 0$

– A – Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants

Rappel cette procédure ne s'applique qu'aux Plans et non aux droites

Dans l'espace 3 cas possibles :
Les 2 plans sont sécants et il vont se couper selon une droite,
Les 2 plans sont parallèle et distinct,
Les 2 plans sont parallèle et confondus.
La procédure commune est de trouver un vecteur normal de chaque plan.

Rappel : $ax + by + cz + d = 0$ *donne le vecteur normal d'un plan* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ Le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{Q}$.

De manière évidente, les deux vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires car **ils ne sont pas proportionnel**.

En effet si on divise x_n par $x_{n'}$ donne $1/3$ et y_n par $y_{n'}$ donne $3/2$ et z_n par $z_{n'}$ donne $1/3$.

Ces 3 fractions ne sont pas égales donc les deux vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants.

– B – Intersection de deux Plans :

Rappel : Si on recherche une intersection de droite ou de plan même procédure.

$$\begin{cases} x-3y+2z+5=0 \quad L1 \\ 3x-2y+6z+2=0 \quad L2 \end{cases}$$

Il faut éliminer soit $x, y\ ou\ z$.

$$\begin{cases} 0x-9y+2y+0z+13=0 \quad {\color{red}3L1-L2} \\ 3x-2y+6z+2=0 \quad L2 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ 3x-\dfrac{26}{7}+6z+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ 21x-26+42z+14 \quad en\ multiplient\ tout\ par\ 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{13}{7} \\ x=t \\ 21t-12+42z=0 \end{cases} \begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ 42z=-21t+12 \end{cases} \begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ z=-\frac{21}{12}t+\frac{12}{42} \end{cases}$$

D'où l'équation paramétrique : $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{13}{7} \\ z=-\frac{1}{2}t+\frac{2}{7} \end{cases}$

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

Les plans sont parallèles (vecteurs normaux sont colinéaires)

2 Déterminer...

Sécants en une droite : $\begin{cases} x=9t+3 \\ y=22t+1 \quad \text{avec } t\in \mathscr{R} \\ z=8t \end{cases}$

1.6 Exercices 06

Caractériser l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que :

1 $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x - 3y + 7z = 1 \\ -7x + 21y - 49z = -7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} -x + 3y + 7z = 3 \\ 2x - 6y - 2z = 1 \end{cases}$

$\mapsto$ *Document01 d'aide* $\mapsto$ *Document02 d'aide* $\mapsto$ *Document03 d'aide*

Exemples :

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

Intersection droite : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \quad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = 7 - 5t \end{cases}$

2 Déterminer...

Les plans sont confondus : $x - 3y + 7z = 1$

3 Déterminer...

Les plans sont strictement parallèles

1.7 Exercices 07

On concidére la droite $\mathscr{D}_1$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 0-3t \\ z = 5+0t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

1 Déterminer la position $\mathscr{D}_1$ par rapport au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :
$2x - y + 3z + 10 = 0$

2 Déterminer sa position par rapport au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation :
-x-y+2z=0

$\mapsto$ *Document*01 *d'aide*

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

1 - $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$

2 - $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$

3 - On calcul maintenant le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$:

$\vec{u}.\vec{n} = 3*(2) - 3*(-1) + 0*(3) = 0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

On en déduit que :

- Soit $\mathscr{D}_1$ est incluse dans $\mathscr{P}$

- Soit $\mathscr{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$

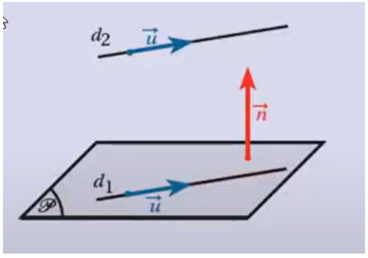


FIGURE 1 – –

4 - Soit $A(1;0;5)$ de la droite $\mathscr{D}_1$

On vérifie si les coordonnées de A vérifie l'équation cartésienne.

$2x_A - y_A + 3z_A + 10 = 2*(1) - 1*(0) + 3(5) + 10 = 2 + 15 + 10 = 0$

Si l'équation = 0 Alors A appartient au plan $\mathscr{P}$

5 - $\Rightarrow$ La droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$

Points d'intersection $M(-8;9,5)$

2 Déterminer...

1 - $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$

2 - $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$

3 - On calcul maintenant le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}$:

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 3*(-1)-3*(-1)+0*(2) = 0$ Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

On en déduit que :

- Soit $\mathscr{D}_1$ est incluse dans $\mathscr{P}$

- Soit $\mathscr{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$

4 - Soit $A(1;0;5)$ de la droite $\mathscr{D}_1$

On vérifie si les coordonnées de A vérifie l'équation cartésienne.

$-x_A - y_A + 2z_A = -1*(1)-1*(0)+2(5) = -1+10 = 0$

Si l'équation = 0 Alors A appartient au plan $\mathscr{P}$

5 - $\Rightarrow$ La droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$

Parallèles et $\mathscr{D}_1$est inclus dans $\mathscr{P}_1$

1.8 Exercices 08

Déterminer l'intersection :

1 De la droite $\mathscr{D}_1$ définie par $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-5t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation cartésienne $3x-2y+5z-1=0$

2 De la droite $\mathscr{D}_2$ définie par $\begin{cases} x = 2+6t \\ y = 3-t \\ z = 12 \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

avec le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x+6y+3z-7=0$

3 De la droite $\mathscr{D}_3$ passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

avec le plan $\mathscr{P}_3$ caractérisé par le point $O(0;0;0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longmapsto$ *Document01 d'aide*

Solutions de l'exercice :

1 Déterminer...

1 - Soit $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appliquons le produit en croix $|^1_0 x^0_3| = 0-0=0$

$$et$$

ne sont pas colinéaire!! car proportionnel à 0!! 2 - $M \in d \bigcap P \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+5z-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

$$\begin{cases} 3(-1+3t)-2(2-5t)+5(t)-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} (-3+9t)-(4-10t)+(5t)-1=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8+24t=0 \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ x=-1+3t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases} \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ x=-1+3*(\dfrac{1}{3}) \\ y=2-5*(\dfrac{1}{3})t \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{36} \end{cases}$$

Point d'intersection $M(0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3})$

2 Déterminer...

Strictement parallèles

3 Déterminer...

1 - Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

2 - $M \in d \bigcap P \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

$$\begin{cases} 3(-1+3t) - 2(2-5t) + 5(t) - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} (-3+9t) - (4-10t) + (5t) - 1 = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 24t = 0 \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = -1 + 3 * (\dfrac{1}{3}) \\ y = 2 - 5 * (\dfrac{1}{3})t \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{36} \end{cases}$$

Point d'intersection $M(-2; 0; 2)$

1.9 Exercice 09

- **EXO 09-01**

Justifier position relative des droites

D_1 définie par $\begin{cases} x=5+3t \\ y=2+t \\ z=1-4t \end{cases}$

$D_{D'}$ définie par $\begin{cases} x=2t'-11 \\ y=10-2t' \\ z=4+t' \end{cases}$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $3x-2y+5z-1=0$

$\Rightarrow$ Sécante et coplanaire. Point d'intersection $M(-1;0;9)$.

1.10 Exercice 10

- **EXO 10-01**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=5-t \\ z=7+4t \end{cases}$ et de D_2 définie par $\begin{cases} x=-5-t \\ y=6+\dfrac{2}{2}t \\ z=2-2t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Strictement parallèles..

- **EXO 10-02**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=5-t \\ z=7+4t \end{cases}$ et de D_3 définie par $\begin{cases} x=4+t \\ y=-6-3t \\ z=21+2t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Sécante en $M(1;3;15)$.

- **EXO 10-03**

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

De D_1 définie par $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=5-t \\ z=7+4t \end{cases}$ et de D_4 définie par $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2 \\ z=7-5t \end{cases}$

⇒ Ni parallèles ni sécantes donc non coplanaires.

- **EXO 10-04**

  Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

  De D_1 définie par $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 7+4t \end{cases}$ et de D_5 définie par $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2+\dfrac{3}{2}t \\ z = 19-6t \end{cases}$

⇒ Droites confondues.

---

2 Exercices 11-20

2.1 Exercice 11

- **EXO 11-01**

La droite (AB) où $A(-1;6;-1)$ et $B(2;3;5)$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 4+t \\ z = 3-2t \end{cases}$

⇒ Vrai..

- **EXO 11-02**

La droite d'intersection des plans d'équations $2x+4y-z-2=0$ et $y-z+3=0$ admet pour système d'équations paramétrique : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}+3t \\ y = -2+2t \\ z = 1+2t \end{cases}$

⇒ Faux.

- **EXO 11-03**

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+2y-z-11=0$et C le point de coordonnées $(1;0;-2)$.
Alors $D(3;2;-1)$ est le projeté orthogonal de C dans le plan $\mathscr{P}$
⇒ Faux.

⇒ Faux.

- **EXO 11-04**

Les points $E(2;4;1)$, $F(0;4;-3)$ et $G(3;1;-3)$ appartiennent à un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

⇒ Vrai.

⇒ Vrai

- **EXO 11-05**

La droite (CG) pour représentation paramétrique le système suivant : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = -1-t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vrai.

2.2 Exercice 12

- **EXO 12-01**
  Soit ABCDEFGH un cube de coté 1 et $()A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ est un repère orthonormé de l'espace.
  Calculer le volume du tétraèdre$BCDG$

  $\Rightarrow V = \frac{1}{6} UA.$

- **EXO 12-02**
  Calculer l'aire du triangle BDG.

  $\Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **EXO 12-03**
  On appelle distance du point Ω au plan $\mathscr{P}$ la plus petite distance ΩM avec M un point du plan $\mathscr{P}$, elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $\mathscr{P}$.
  Calculer la distance du point C au plan (BDG)

  $\Rightarrow CH' = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- **EXO 12-04**
  Déterminer une équation cartésienne du plan (BDG)

  $\Rightarrow -x - y + z + 1$

2.3 Exercice 13

L'espace est muni du repère orthonormal $O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes.

PARTIE A

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $6x+3y-2z-6=0$

- **EXO 13-A01**

  Étudier la position relative des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

  $\Rightarrow$ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.

  > $\Rightarrow -x-y+z+1$

- **EXO 13-A02**

  Établir un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

  > $\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3}t-2 \\ y=\frac{8}{3}t+6 \\ z=t \end{cases}$

- **EXO 13-A03**

  Vérifier, pour tout point $M(x;y;z)$, l'équivalence.

  $M(x;y;z)\in\mathscr{P}\bigcap\mathscr{P}' \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=5t+3 \\ y=-8t-2 \\ z=3t+3 \end{cases}$

  > $\Rightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires et $N(3;-2;3)$

PARTIE B

On considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;-3)$

Soit $\mathscr{P}''$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$

- **EXO 13-B01**

  Soit $M()x;y;z$ un point de l'espace.

  Établir que $M\in(AB)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$

  > $\Rightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires donc il existe $t\in\mathscr{R}$

- **EXO 13-B02**
  Après avoir montré que la droite (AB) et la plan $\mathscr{P}''$ sont sécants, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

> $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} \neq 0$ d'où (AB) et $\mathscr{P}''$ sont sécants $I(-2;6;0)$

- **EXO 13-B03**
  Montrer que la droite (BC) coupe le plan $\mathscr{P}''$ au point $J(O;2,8,1,2)$.

> $\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n} \neq 0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\mathscr{P}''$ sont sécants $J(0;\frac{14}{5});\frac{6}{5})$

- **EXO 13-B04**
  Vérifier que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire au vecteur

> $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.
>
> $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = 0,4\overrightarrow{v}$
> .

- **EXO 13-B05**
  Démontrer que les points $A, B\ et\ C$ forment un plan.

> $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc les points $A, BetC$ forment un plan.

- **EXO 13-B06**
  Caractériser l'intersection des plans (ABC) et $\mathscr{P}''$

> $\Rightarrow$ L'intersection est la droite $()IJ$.

2.4 Exercice 14

- **EXO 14-01**
  On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -1-4t \\ y = 1+2t \\ z = 5+2t \end{cases}$
  On donne les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;-3;1)$ Déterminer une représentation paramétrique de la droite AB.

  $\Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+1 \\ z = -t \end{cases}$.

- **EXO 14-02**
  Les droites $\mathscr{D}$ et AB sont-elles coplanaires

  $\Rightarrow$ Les vecteurs directeurs sont colinéaires donc les droites sont coplanaires..

- **EXO 14-03**
  Le point C appartient-il à la droite $\mathscr{D}$.

  $\Rightarrow C \in \mathscr{D}$

  .

2.5 Exercice 15

- **EXO 15-01**
  On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est
  $\Rightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 3-2t \end{cases}$
  Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(2;3;-1)$ sur la droite $\mathscr{D}$.

  $\Rightarrow H(\frac{11}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{2})$

2.6 Exercice 16

- **EXO 16-01**

Préciser la nature géométrique de l'ensemble défini par : $S \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$

$\Rightarrow$ Droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1;0;-2)$.

2.7 Exercice 17

- **EXO 17-01**

Dans un repère $O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ est une base des vecteurs de l'espace.

$\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas coplanaires d'où le résultat..

- **EXO 17-02**

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

π

WP-CMS

Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Exercices

Numéro 02

⟼ *Documentderéférence*

⟼ *Mémo − vecteurs, droitesetplandansl′espace*

⟼ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

⟼ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

1 Plan du document

2 Représentation paramétrique d'une droite :

Enoncé :

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$.

- [1] Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
- [2] Le point $C(5;8;9)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
- [3] La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique.
$$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 7-8t \quad \text{avec } t \in \mathscr{R} \\ z = 4t \end{cases}$$
- [4] Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Réponsse :

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$.

[1] Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Rappel :

$$M\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \in D(A;\vec{u}) \longrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{ct}_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$$

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

Donc la droite (AB) est définit par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

- Calcul du point A : $A \to (1;-1;4)$

- Calcul du vecteur directeur$\overrightarrow{AB}$: $AB(-1-(1);3-(-1);2-(4))$ soit $(-2;4;-2)$

La droite (AB) passe par le point $A\begin{cases} 1 \\ -1 \\ 4 \end{cases}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{cases} -2 \\ 4 \\ -2 \end{cases}$

La représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+4t \quad ou \quad t \in \Re \\ z = 4-2t \end{cases}$

Réponsse :

[2] Le point $C(5;8;9)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.

Rappel :

$C \in (AB)$ Si les coordonnées de C vérifient le système d'équation.
C'est à dire si on trouve les mêmes valeurs de t dans les trois équations.

$$C \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = 1 - 2t \\ 8 = -1 + 4t \\ 9 = 4 - 2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t = -4 \\ 4t = 9 \\ 2t = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{9}{4} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi ce système n'a pas de Réponsse. Donc $C \notin (AB)$

Réponsse N°03 :

[3] La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 8t \qquad ou \quad t \in \Re \\ z = 4t \end{cases}$$

Rappel :

- On voit que le système à les caractéristiques de la représentation d'une droite.
- On regarde si le point $A \in (AB)$ en remplaçant ces coordonnée dans le système. Si le système est vérifié alors le point $A \in (AB)$ rappel : $A(1;-1;4)$.
- On regarde si le point $B \in (AB)$ en remplaçant ces coordonnée dans le système. Si le système est vérifié alors le point $B \in (AB)$ rappel : $B(-1;3;2)$..

Résolvons pour A : $\begin{cases} 1 = -3 + 4t \\ -1 = 7 - 8t \\ 4 = 4t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4t = 4 \\ 8t = 8 \\ t = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \quad \in \quad (AB)$

Résolvons pour B : $\begin{cases} -1 = -3 + 4t \\ 3 = 7 - 8t \\ 2 = 4t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4t = 2 \\ 8t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B \quad \in \quad (AB)$

Les coordonnées de A et B vérifient le système. Donc ce système est bien une représentation paramétrique de (AB)

Réponsse N°04 :

[4] Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Rappel :

Si les points $A(1;-1;4)$ et $B(-1;3;2)$ alors le vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}(-2;4;-2)$ [coordonnées de B-A].

rappel : $C(5;8;9)$

La droite Δ passe. $C\begin{cases} 5 \\ 8 \\ 9 \end{cases}$ et à pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{cases} -2 \\ 4 \\ -2 \end{cases}$ puisque (AB) est parallèle à Δ.

Donc Δ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5-2t \\ y = 8+4t \\ z = 9-2t \end{cases} \quad ou \quad t \in \Re$

Retour au sommaire 1

3 Comment savoir si 2 droites sont parallèles, sécantes ou non coplanaires :

Enoncé :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$.
On considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques :

$$D_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad ou \quad t \in \Re \qquad D_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -4 - 3s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad ou \quad s \in \Re$$

- [1] D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Justifier.
- [2] D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

Réponsse N°01 :

[2] D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

Rappel :

2 droites peuvent être
coplanaires : *paralléles* ou *sécantes*
noncoplanaires

Une droite admet une représentation paramétrique de la forme
$$D : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{ct}_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$$

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$
Deux vecteurs directeurs sont colinéaire si leurs coordonnées sont proportionnelles.

On cherche un vecteur directeur de chaque droite. Si colinéaire les droites sont parallèles.

$\overrightarrow{D_1} \begin{cases} 1 \\ -3 \\ -3 \end{cases}$ et $\overrightarrow{D_2} \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 1 \end{cases}$ sont deux vecteur directeurs respectifs de D_1 et D_2.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles
(en effet, si on multiplie l'élément y de D_1 par -1 les deux élément sont proportionnelle mais les éléments x et z ne le sont pas).

> D_1 et D_2 ne sont pas parallèle.

Réponsse N°02 :

[2] D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

Rappel :

2 droites peuvent être

- *coplanaires*
  - *parallèles*
  - *sécantes*
- *noncoplanaires*

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$

Deux vecteurs directeurs sont colinéaire si leurs coordonnées sont proportionnelles.

D_1 et D_2 ne sont pas parallèle mais elles peuvent être sécantes ou coplanaires ?

- Si les coordonnées d'un point $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ vérifie le système D_1 alors ce point est sur la droite D_1

- Si les coordonnées d'un point $\begin{cases} x = 2s \\ y = -4 + 3s \\ z = --1 + s \end{cases}$ vérifie le système D_2 alors ce point est sur la droite D_2

Ensuite on va chercher un point qui vérifie les deux systèmes.

Pour cela on cherche s et t pour avoir le même $x; y; z$. (E) $\begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -3 - 3t = -1 + s \end{cases}$

Pour résoudre ce système on doit d'abord éliminer soit t ou soit s.

$$\begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -3 - 3t = -1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ -1 = -3 + 2s [L2 - L3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2s \\ -4 - 3t = -4 + 3s \\ s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2 \\ -4 - 3t = -1 \\ s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Le système E ayant pour solution $s = 1$ et $t = -1$, D_1 et D_2 sont sécantes.

4 Géométrie dans l'espace et Physique : vitesse et déplacement :

Enoncé :

On observe deux sous-marins se déplaçant chacun en ligne droite et à vitesse constante. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$. dont l'unité est le mètre.

Le plan $r$eprésente la surface de la mer.

La cote z est nulle au niveau de la mer et négative sous l'eau.

A chaque instant $t \geq 0$, exprimé en minute, le premier sous-marin est repéré par le point

$$S_1(t) \text{ de coordonnées } \begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

- [1] Déterminer la $vitesse$ du premier sous-marin.
- [2] On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire de ce sous-marin avec le plan horizontal. On arrondira à 0,1 degré près.
- [3] A chaque instant $t \geq 0$, le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$
  On sait que $S_2(0)$ et $S_2(3)$ ont pour coordonnées respectives $(68; 135; -68)$ et $(-202; -405; -248)$
  A quel instant t exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur?

Réponsse N°01 :

[2] Déterminer la vitesse du premier sous-marin.

- la vitesse $V = \frac{d}{T}$ d = distance de A à B.
  Coordonnée du sous marin 1 à l'instant $t = 0$ et $t = 1$ minute
  $S_1(0) \begin{cases} 140 \\ 105 \\ -170 \end{cases} \quad S_1(1) \begin{cases} 80 \\ 15 \\ -200 \end{cases}$ Note : données de $S_1(t)$
- $S_1(0)S_1(1) = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = \sqrt{12600} \approx 112.$
  En km/h : $112 * \frac{60}{1000} = 16,7$ km/h.
  Rappel : Dans un repère orthonormé $A \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases} \quad B \begin{cases} a' \\ b' \\ c' \end{cases} \quad AB = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}$

> La vitesse du sous marin 1 est de 16,7 km/h.

Réponsse N°02 :

[2] On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire de ce sous-marin avec le plan horizontal. On arrondira à 0,1 degré près.

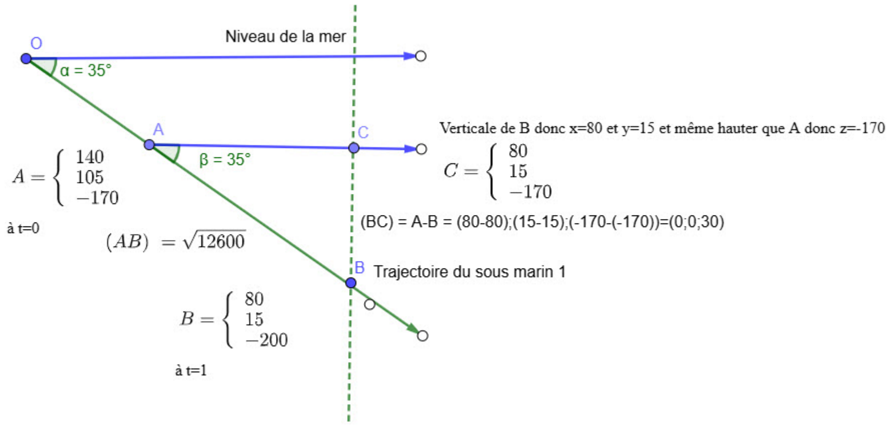


FIGURE 1 – $C_f = x(2(lnx)^2 - 3ln(x) + 2)$

Dans le triangle rectangle $\widehat{ABC}$, on connait l'hypoténuse et le coté opposé

Donc $\sin\alpha = \dfrac{30}{\sqrt{12600}} \approx 0,2672$

Ainsi $\alpha \approx 15,5$ř [Par la calculette en degré on calcule Arc sinus]

$\alpha \approx 15,5°$.

Réponsse N°03 :

[2] A chaque instant $t \geq 0$, le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$

On sait que $S_2(0)$ et $S_2(3)$ ont pour coordonnées respectives $(68; 135; -68)$ et $(-202; -405; -248)$

A quel instant t exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur?

La profondeur est représentée par l'axe Z

- A l'instant $t = 0$ le sous marin 2 se trouve $= z = -68$

- A l'instant $t = 3$ le sous marin 2 se trouve $= z = -248$

Donc le sous marin 2 descend de 180 m en 3 minutes $[-248 - (-68) = -180]$

C'est à dire de -60 m en 1 minute $[\dfrac{-180}{3}]$.

Ce qui donne l'équation $z_2(t) = -68 - 60t$ [-68 $\longrightarrow$ instant 0 et -60t $\longrightarrow$ la descente par minute].

Les deux sous marins seront à la même hauteur :

Il faut résoudre l'équation : $-68 - 60t = -170 - 30t \Leftrightarrow 30t = 102 \Leftrightarrow t = 3,4$

Les sous marin seront à la même profondeur à $t \approx 3,4$ minutes.

5 Volume d'un tétraèdre et comment utiliser GEOGEBRA

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On concidére les points : $A(-1;1;0)$, $B(6;-5;1)$, $C(1;2;-2)$ et $S(13;37;54)$

1 Réaliser les 3 points suivants :

- a Justifier que les points A, B, C définissent bien un plan.

- b Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- c En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC).

2 Réaliser les 2 points suivants :

- a Déterminer la nature du triangle ABC

- b Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unité d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$.

3 - a Prouver que les points $A, B, CetS$ ne sont pas coplanaires.

- b La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

Donner en une représentation paramétrique.

- c (Δ) coupe le plan (ABC) passant par le point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

4 Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\frac{Airedelabasexlahauteur}{3}$.

$\mapsto Vidéo-de-référence$

1 Réaliser les 3 points suivants :

- A) Justifier que les points A, B, C définissent bien un plan.

Pour cela il faut démontrer que deux vecteurs du plan ABC sont **non colinéaires**.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

Vérifions la proportionnalité : Coordonnées croisées $7*3 \neq -4*2$ donc ces vecteurs ne sont pas proportionnel donc non colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non proportionnelles donc les points A, B, C ne sont pas alignés donc ABC forment un plan.

- B) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Pour cela il faut démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaire du plan ABC.On calcul les produits scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix} = 35-64+29 = 64-64 = 0$: $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien orthogonaux.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = 10+48-58 = 58-58 = 0$ $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien orthogonaux.

Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs <u>non colinéaire</u> de (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est normal à (ABC).

- C) En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC).

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\9\end{pmatrix}$ est normal à (ABC) donc (ABC) admet une équation cartésienne

de la forme : $ax+by+cz+d=0 \Rightarrow 5x+16y+29z+d=0$ avec $d \in \mathscr{R}$

Or $A(-1;-1;0) \in (ABC) \Leftrightarrow 5x_A+16y_A+29z_A+d=0$

$\Leftrightarrow -5-16+d=0 \Leftrightarrow d=21$

Donc le plan (ABC) admet l'équation cartésienne : $\Rightarrow 5x+16y+29z+21=0$**.**

2 Réaliser les 2 points suivants :

- A) Déterminer la nature du triangle ABC

Pour cela il faut démontrer que le triangles est soit rectangle, soit isocèle ou équilatéral.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}.$

On est dans un repère orthonormé donc :

$AB=\sqrt{49+16+1}=\sqrt{66}$ $AC=\sqrt{44+9+4}=\sqrt{17}$ $BC=\sqrt{25+49+9}=\sqrt{83}$

Selon le théorème réciproque de Pythagore

$\begin{pmatrix} BC^2=83 \\ AB^2+AC^2=66+17=83 \end{pmatrix}$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

- B) Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unité d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

ABC est rectangle en A : $(ABC)=\dfrac{AB*AC}{2}=\dfrac{\sqrt{66}-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$

Donc Aire $(ABC)=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$**.**

- A) Prouver que les points $A, B, CetS$ ne sont pas coplanaire.

Montrons que $S \notin (ABC)$

$S = \begin{pmatrix} 13 \\ 37 \\ 54 \end{pmatrix}$

$5x_s + 16y_s + 29z_s + 21 = 2244 \neq 0$

Donc $S \notin (ABC)$

- B) La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

Donner en une représentation paramétrique.

La droite Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est directeur de la droite Δ

Donner en une représentation paramétrique.

$$\Delta \begin{cases} x = 13 \ + 5t \\ y = 37 \ + \ 16t \\ z = \underbrace{54}_{S} + \underbrace{29}_{\vec{n}} \ t \end{cases} \quad avect \in \Re.$$

- C) (Δ) coupe le plan (ABC) passant par le point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

$$\Delta \begin{cases} x = 13 \ + 5t \\ y = 37 \ + \ 16t \\ z = \underbrace{54}_{S} + \underbrace{29}_{\vec{n}} \ t \end{cases}$$

On résoud l'équation :

$5(13 + 5t) + 16(37 + 16t) + 29(54 + 29) + 21 = 0 \Leftrightarrow (25 + 256 + 841)t + 65 + 592 + 1566 + 21$

$1122t + 2244 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2244}{1122} \Leftrightarrow t = -2$

On remplace t par sa valeur : $H \begin{cases} x = 13 - 10 \\ y = 37 - 10 \\ z = 54 - 58 \end{cases}$

$H = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ **Voir geogebra**

4 Réaliser le point suivant :

- Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$.

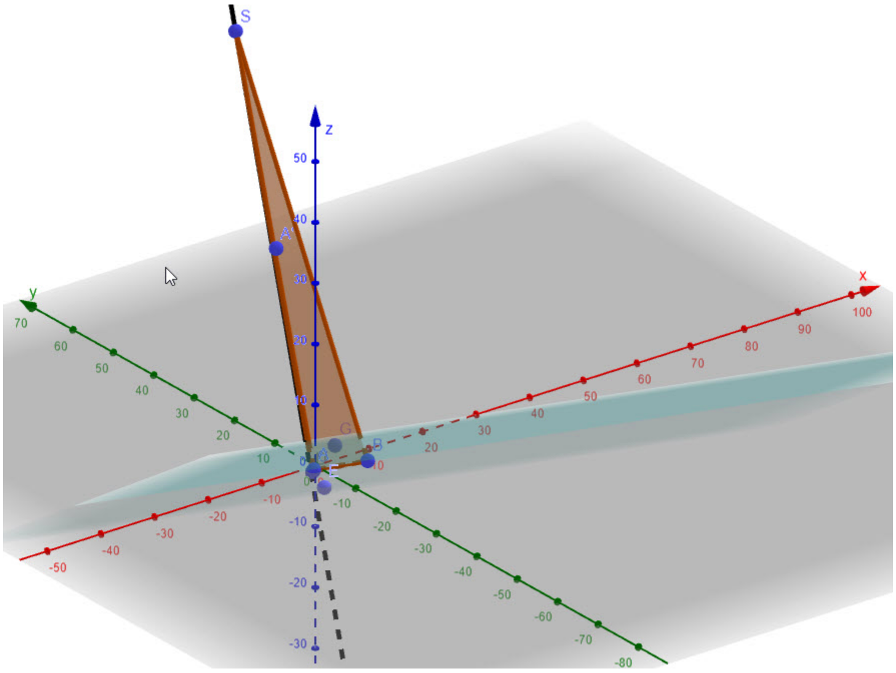
Base : $ABC \Rightarrow$ Aire $(ABC) = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$

H est la projetée de S sur (ABC) donc la hauteur $= SH$

$S\begin{pmatrix} 13 \\ 37 \\ 54 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 58 \end{pmatrix}$ $HS = \sqrt{10\sqrt{2} + 32^2 + 58^2} = \sqrt{4 * 1122} = 2\sqrt{1122}$

Le volume : $\dfrac{\sqrt{1122} * 2\sqrt{1122}}{2 * 3} = \dfrac{1122}{3} = 374$ Voir geogebra



Procédure :

Saisir dans geogebra

$A = point(-1,-1,0), B = point(6,-5,1), C = point(1,2,-2) et S = point(13,37,54)$

$p : Plan(A,C,B)$ **donne** Équation cartésienne $-5x-16y-29z = 21$. Voir geogebra

Vecteur normal au plan ABC $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$. Voir geogebra

$A' = Translation(A,v)$ donne $= (4,15,29)$

$u = Vecteur(A,A')$ donne $\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$

$f = Segment(B,A)$ donne $= 8,12$

$g = Segment(A,C)$ donne $= 4,12$

$a = Segment(C,B,t1)$ donne $= 9,11$

$b = Segment(A,C,t1)$ donne $= 4,12$

$c = Segment(B,A,t1)$ donne $= 8,12$

$t1 = Polygone(B,A,C)$ donne $= 16,75$

$h : Perpendiculaire(S,p)$ donne $= X = (13,37,54) + \gamma(-5,-16,-29)$

$D = Intersection(h,p)$ **donne** $= (3,5,-4)$ **Coordonnées de H**

$l = Pyramide(A,B,C,S)$ **donne** $= 374$ **Volume du tétraèdre**

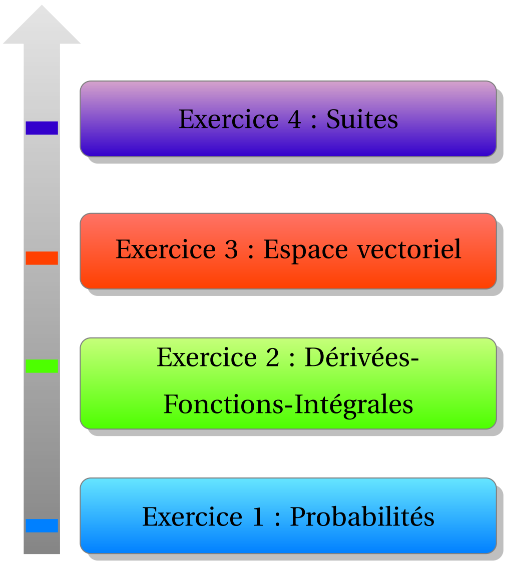
π

Mathématiques

Vecteurs - Matrices

Introduction

Durée : 2 heures



Le concept mathématique de matrice est introduit dans le contexte de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Le lecteur est amené à découvrir la notation des matrices, le produit matriciel (entre une matrice carrée et une matrice colonne), la notion de déterminant, de matrice inverse et la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Table des matières

1 Un exemple concret simple :

Unexemple concret simple :

3

Imaginons que nous voulons trouver les coordonnées x et y du point d'intersection de deux droites. Chacune répond à une certaine équation linéaire1 (les x et y apparaissent chacun au 1er degré) :

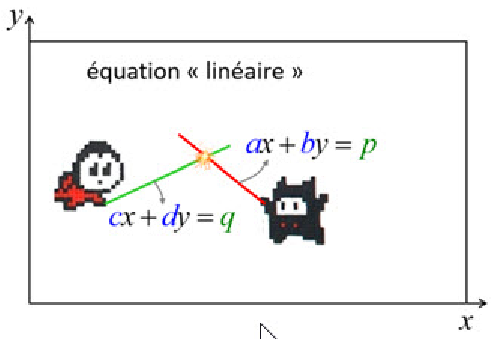


FIGURE 1 – Équation linéaire

Leur point d'intersection appartient à chacune des deux droites, donc ses coordonnées x et y doivent satisfaire les deux équations simultanément. Mathématiquement, ces équations forment un système (ici de deux équations à deux inconnues) :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Le calcul matriciel permet de trouver, en une seule opération, le couple de nombres (x, y) **qui constitue la solution de ce système.** On peut donc dire, en quelque sorte, qu'une telle opération est « collective » (deux inconnues sont trouvées en une opération). C'est le grand intérêt des matrices, elles permettent d'effectuer des opérations mathématiques sur une grandes quantité de nombres simultanément. En langage matriciel le système se traduit comme suit :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Chaque tableau de nombres entre parenthèses est une matrice. Dans le membre de droite les deux matrices sont multipliées entre elles. Le produit matriciel doit donc être défini de manière à retrouver dans cette écriture le système d'équations de départ. C'est ce dont nous discutons dans la section suivante.

2 Produit de matrices :

Le fait qu'il faille retrouver le système d'équations à partir de cette écriture matricielle va nous guider pour découvrir quelques premières règles de calcul matriciel.

Nous retrouvons le membre gauche de la première équation en multipliant les nombres de la première ligne de la première matrice (a, b) par ceux de la première (et unique) colonne de la deuxième matrice (x, y), puis en additionnant les résultats.

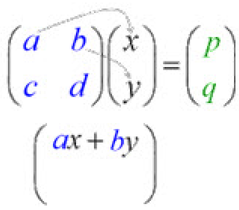


FIGURE 2 – Équation linéaire

Et nous retrouvons le membre gauche de la deuxième équation en multipliant les nombres de la deuxième ligne de la première matrice (c, d) par ceux de la première colonne de la deuxième matrice (x, y), puis en additionnant les résultats.

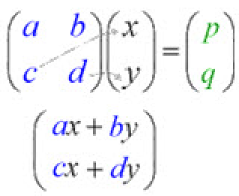


FIGURE 3 – Équation linéaire

Ces opérations rappellent des produits scalaires :

- le produit scalaire de la première ligne avec la première colonne
  $(a, b).(x, y) = ax + by$

- le produit scalaire de la deuxième ligne avec la première colonne
  $(c, d).(x, y) = cx + dy$

De cette manière, le produit des deux matrices fournit bien ce que nous voulions :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

3 Égalité de matrices :

Après avoir effectué le produit des deux matrices, nous obtenons une égalité entre deux matrices :

$$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Pour retrouver les deux équations elles-mêmes, nous devons admettre que deux matrices sont égales si chaque élément dans l'une est égal à l'élément qui est situé à la même position (ligne,colonne) dans l'autre.

4 Notation symbolique des matrices :

Afin de pouvoir désigner les matrices plus facilement, attribuons-leur des symboles :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

FIGURE 4 – Équation linéaire

- **A** est la matrice du système d'équations, elle contient les coefficients des inconnues x et de y. Elle possède deux lignes et deux colonnes ; c'est une matrice 2 2 (sous-entendu à 2 lignes et 2 colonnes). Il s'agit d'une matrice carrée (même nombre de lignes et de colonnes).

- **X** est la matrice des inconnues x et y. Elle possède deux lignes et une seule colonne ;c'est une matrice 2 1 (sous-entendu à 2 lignes et 1 colonne). C'est une matrice colonne, ou plus simplement un vecteur colonne ;

- **P** est la matrice des termes indépendants. C'est aussi une matrice colonne 2 1 ou un vecteur colonne.

Avec cette notation, nous arrivons à une écriture très compacte :

AX=P

5 Inverse d'une matrice :

Nous pourrions être tentés de résoudre cette équation en écrivant simplement

$$X = \frac{P}{A} = A^{-1}P$$

mais cette opération n'a rien de la division par un simple nombre. Dans la suite nous allons non seulement découvrir que cette opération est permise et a du sens, mais aussi trouver com ment la réaliser au moyen des quatre opérations arithmétiques de base. L'aboutissement sera la découverte des éléments de A^{-1}.

6 Résolution ordinaire du système :

1] Afin de découvrir les éléments de la matrice A^{-1}, résolvons le système de manière ordinaire, par élimination de variables. La longueur du processus montrera bien l'intérêt d'une résolution matricielle. Rappelons que le système est

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

2] Commençons par éliminer y. Pour cela, multiplions la première équation par d (qui est le fac teur de y dans la seconde) et la seconde par b (qui est le facteur de y dans la première) :

$$\begin{cases} ax + by = p | * d \\ cx + dy = q | * b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} adx + bdy = dp \\ cbx + dby = bq \end{cases}$$

3] Soustrayons la seconde de la première. Les termes bdy se simplifient. Il reste :

$$adx - bcx = dp - bq$$

4] Mettons x en évidence dans le membre gauche :

$(ad - bc)x = dp - bq$ isolons enfin x : $x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc}$

5] Recommençons, mais cette fois en éliminant x. Pour cela, multiplions la première équation par c (qui est le facteur de x dans la seconde) et la seconde par a (qui est le facteur de x dans la première) :

$$\begin{cases} ax+by=p \mid *c \\ cx+dy=q \mid *a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} acx+bcy=dp \\ acx+ady=bq \end{cases}$$

6] Soustrayons la seconde de la première. Les termes acx se simplifient. Il reste :

$$bcy-ady=cp-aq$$

7] Mettons y en évidence dans le membre gauche :

$$(bc-ad)y=cp-aq$$

8] Changeons les deux membres de signe (l'utilité apparaîtra un peu plus loin) :

$(ad-bc)y=aq-cp$ isolons enfin y : $y=\dfrac{aq-cp}{ad-bc}$

7 Déterminant d'une matrice 2 x 2 :

Nous voyons que le même dénominateur $ad - bc$ apparaît dans les solutions de x et y :

$$\begin{cases} x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \\ y = \dfrac{aq - cp}{ad - bc} \end{cases}$$

Ce nombre est calculé en utilisant tous les éléments que de la matrice A, et seulement eux. Il est la différence entre le produit ad des éléments de sa diagonale principale (↘) et le produit bc des éléments de son autre diagonale (↙). S'il était nul, x et y seraient infinis : le système n'aurait pas de solution. Ce nombre est donc déterminant pour l'existence même d'une solution. Pour cette raison il est nommé déterminant de la matrice A et il est noté $det(A)$:

$$det(A) \equiv ad - bc$$

En multipliant les expressions de x et y ci-dessus par $det(A)$, nous pouvons écrire plus sim plement :

$$\begin{cases} det(A)x = \quad dp - bq \\ det(A)y = aq - cp = -cp + aq \end{cases}$$

ou encore, en adoptant la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} det(A)x \\ det(A)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

8 Produit entre un scalaire et une matrice colonne :

Examinons à présent la matrice dans le membre gauche. Ses éléments possèdent un facteur commun, $det(A)x$.

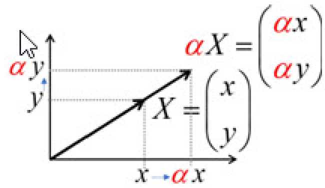


FIGURE 5 – Équation linéaire

De la même manière que le produit entre un scalaire et un vecteur est un nouveau vecteur obtenu à partir du précédent en multipliant toutes ses composantes par ce scalaire, nous définirons que le produit d 'un scalaire et d'une matrice colonne est une nouvelle matrice colonne obtenue à partir de la précédente en multipliant tous ses éléments par ce scalaire; la multiplication est distribuée sur tous les éléments, l'opération réciproque étant la mise en évidence :

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

9 Écriture matricielle de la solution :

Mettons donc $det(A)$ en évidence :

$$det(A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ou encore,en divisant les deux membres par $det(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

En comparant cette formule-ci avec la solution $X = A^{-1}P$ que nous avons écrite plus haut en nous demandant si elle avait du sen, nous pouvons maintenant répondre par l'affirmative puisque nous découvrons comment calculer les éléments de la matrice $det(A)$:

$$det(A)^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ses éléments ressemblent à ceux de la matrice du sytéme, mais il ya quelques différences :
- les deux éléments de sa diagonale principale ($\searrow$) ont été intervertis;
- des deux éléments de son autre diagonale ($\swarrow$). Sont été change de signe;
- et elle est multipliée par $1/det(A)$:

10 Produit entre un scalaire et une matrice carrée :

Pour pouvoir interpréter le résultat obtenu ci dessus pour A^{-1}, voyons comment effectuer une multiplication entre le scalaire $1det(A)/$ et une matrice 2 x 2. Pour ce faire, multiplions par 2 un produit matriciel que nous avons déja rencontré. Nous déduisons successivement :

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} 2\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \begin{pmatrix} 2ax+2by \\ 2cx+2dy \end{pmatrix} \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

FIGURE 6 – Équation linéaire

Les justifications des différentes étapes sont les suivantes :

1. application de la loi de multiplication de deus matrices (effectuer le produit)
2. application de la loi de multiplication entre un scalaire et une matrice colonne
3. application de la loi de multiplication de deux matrices (décomposer en un produit)

En comparant la première et la dernière expression, nous pouvons conclure que pour multiplier une matrice par 2 il faut multiplier tous les éléments de la matrice par 2.

Ce qui vient d'être fait peut être généralisé à une multiplication par n'importe que scalaire α :

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

La multiplication qui apparait dans l'expression de A^{-1} écrite à la fin de la section précédente à donc du sens et nous sommes parvenus à découvrir comment calculer ses éléments. Le système de deux équations à deux inconnus est finalement résolu.

11 CONCLUSION :

- 1 Une matrice est un tableau de nombres caractérisé par son nombre de lignes et de colonnes. Une matrice m n comporte m lignes et n colonnes.

- 2 Une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne porte le nom de matrice colonne ou de vecteur colonne et une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes porte le nom de matrice carrée.

- 3 Deux matrices sont égales si tous leurs éléments sont égaux deux à deux, c'est-à dire si chaque élément de l'une est égal à celui qui occupe la même position (ligne, colonne) dans l'autre.

- 4 Le produit de deux matrices est une nouvelle matrice dont chaque élément est calculé comme le produit scalaire entre une ligne de la première matrice et une colonne de la seconde matrice, la ligne et la colonne à considérer étant celles de l'élément de la nouvelle matrice que l(on calcule)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

- 5 Le déterminant d'une matrice 2 2 vaut

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc \end{pmatrix}$$

- 6 Le produit entre un scalaire et une matrice colonne ou carrée s'obtient en multipliant tous les éléments de cette matrice par ce scalaire

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \qquad \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha b \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$$

- 7 Si une matrice 2 2 possède un déterminant non nul,alors son inverse existe et vaut

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 8 Si le déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues est non nul, sa solution peut être trouvée par le calcul matriciel :

  Équations $AX = P \longrightarrow$ Solutions $X = A^{-1P}$ avec $(det(A) \neq 0)$

  ou plus explicitement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{P} \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{A^{-1}}=\underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{P}$$

- 9 De maniéré générale, les matrices permettent de résoudre collectivement de très grands systèmes d'équations linéaires (énormément d'équations linéaires à énormément d'inconnues).