WP-CMS

π

Mathématiques

Fonctions

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

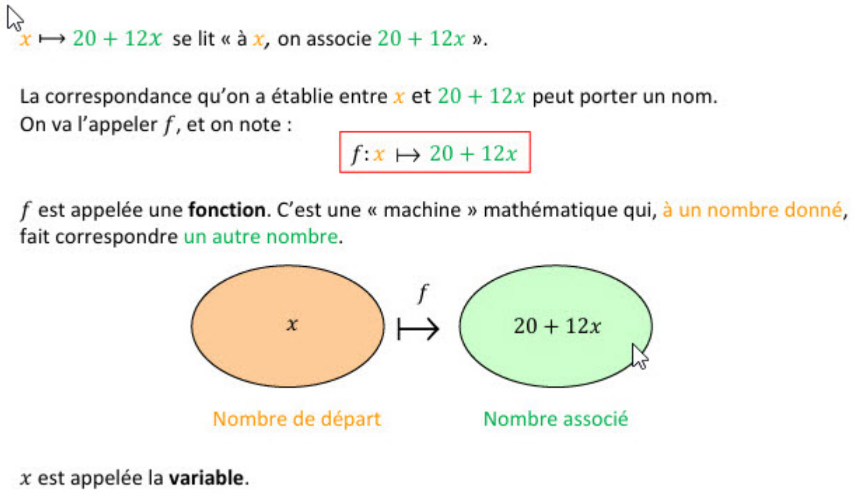
$\longmapsto Document de référence$

1 Plan du document

2 Préface

En mathématiques, **une fonction** est définie comme une relation entre deux ensembles, où chaque élément du premier ensemble (le domaine) est associé à exactement un élément du deuxième ensemble (l'image).
Soit f une fonction telle que $f : A \to B$, où A et B sont deux ensembles. Pour tout X appartenant à A, il existe un unique Y appartenant à B tel que $f(x) = y$.

Exemple :



3 Bases d'une fonction

3.1 Nommage et notation

Une fonction se nomme avec une lettre minuscule. On utilise généralement la lettre f.
Appelons f la fonction ci-dessus. On écrit f de la manière suivante : $f : x \longmapsto 2x + 7$.
Cela se lit : "**fonction f qui à tout nombre x associe le nombre** $2x + 7$".

3.2 Image d'un nombre par une fonction

L'image d'un nombre n par une fonction f est le nombre retourné par f lorsqu'on lui donne n.
Pour notre fonction $f : x \longmapsto 2x + 7$, 13 est l'image de 3 par f
Donc $f(3) = 13$, ce qui se lit : "f de 3 égal 13".

4 Graphe d'une fonction

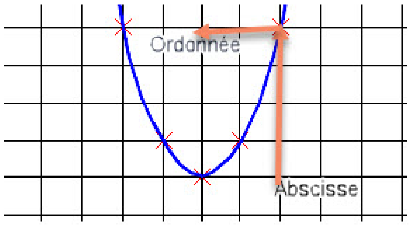
4.1 Représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique d'une fonction est une courbe qui permet de visualiser comment la fonction agit sur les nombres.

Méthode

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction :

1. On dessine deux axes gradués perpendiculaires.
2. On choisit des valeurs de x comme on veut et on calcule les images $f(x)$ correspondantes.
3. Pour chaque x choisi, on se positionne en x sur **l'axe horizontal des abscisses** et on place un point ou une croix à la hauteur $f(x)$ **l'axe verticale des ordonnées**.
4. On relie les points obtenus de manière harmonieuse.



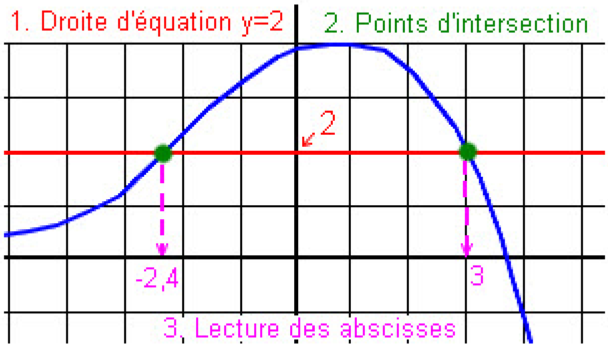
4.2 Antécédent d'un nombre par une fonction

Un **antécédent** d'un nombre b par une fonction f est un nombre a tel que $f(a) = b$.
Pour connaître les antécédents d'un nombre b par une fonction f, **on résout l'équation** $f(x) = b$.

Calcul des antécédents : Exemple

Pour trouver les antécédents de 10 par la fonction $f(x) = x^2 + 1$ on résoud l'équation $x^2 + 1 = 10$.
On obtiens $x^2 = 10 - 1 \Rightarrow x^2 - 9 \Rightarrow x^2 - 3^2 \Rightarrow (x+3)(x-3)$
Les antécédents sont -3 et $+3$.

Lecture des antécédents de 2 par la fonction représentée par la courbe bleue.



Les antécédents de 2 sont -2,4 et 3.

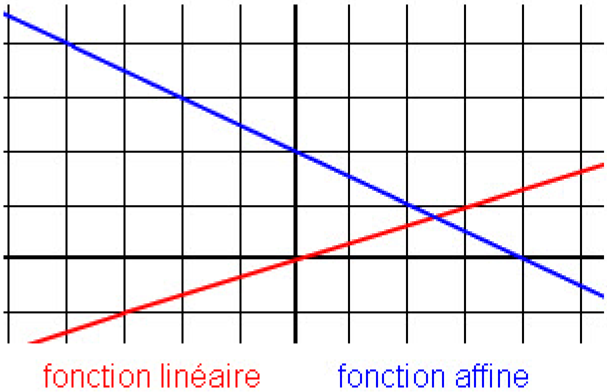
5 Les fonctions affines

5.1 Vocabulaire

1. Une fonction affine est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f : x \mapsto ax + b$
2. Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** et le nombre b s'appelle **l'ordonnée à l'origine**.
3. Une fonction linéaire est une **fonction affine** dont l'ordonnée à l'origine est nulle $f : x \mapsto ax$.

5.2 Représentation graphique

La représentation graphique des fonctions affines et linéaires est toujours une droite.
Pour les fonctions linéaires, cette droite passe par l'origine du repère et les images $f(x)$ sont proportionnelles aux nombres x.

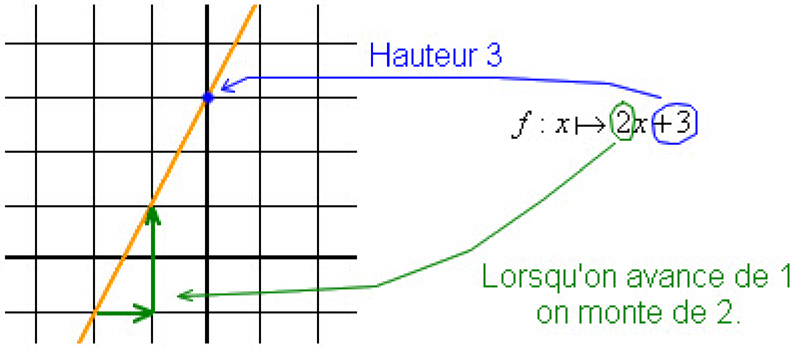


5.3 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine sur un graphique

À partir de la représentation graphique d'une fonction affine, on peut lire graphiquement son **coefficient directeur** et **son ordonnée à l'origine**.

Pour lire le **coefficient directeur**, on se place sur la droite, puis on se déplace horizontalement de 1 à droite puis on regarde de combien on doit monter ou descendre pour revenir sur la droite.

Pour lire **l'ordonnée à l'origine**, on lit l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe vertical des ordonnées.



6 Étude d'une fonction Niveau I

6.1 Ensemble de définition

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction :

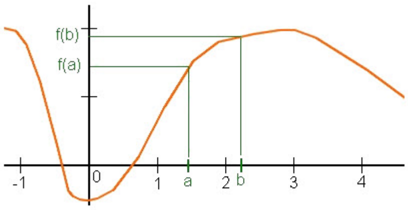
1. Si la fonction contient une racine carrée
Si la fonction contient une racine carrée, Alors il faut que l'expression sous la racine soit positive pour qu'on puisse calculer les images.
Pour $f : x \mapsto \sqrt{g(x)}$, on commence par résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 0$
L'ensemble de définition est l'ensemble des solutions de cette inéquation.
Exemple : Pour $g : x \mapsto \sqrt{14-7x}$, on résoud l'inéquation $14-7x \geqslant 0$. On trouve $x \leqslant 2$. Donc $\mathscr{D} =]-\infty;2]$.

2. Si la fonction contient un quotient
Si la fonction contient un quotient, Alors il faut que le dénominateur soit différent de zéro pour qu'on puisse calculer les images.
Pour $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{h(x)}$, on commence par résoudre l'équation $h(x) = 0$
L'ensemble de définition est l'ensemble des nombres réels moins les éventuelles solutions de cette équation.
Exemple : Pour $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2x-8}$, on résoud l'équation $2x-8=0$. On trouve $x=4$. Donc $\mathscr{D} =]-\infty;4[\bigcup]4;+\infty[$.

6.2 Variation de fonction

6.2.1 Fonction croissante

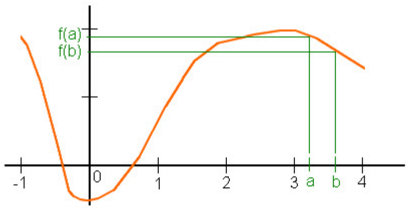
Si, sur un intervalle de l'axe des abscisses, la courbe d'une fonction **monte**, Alors on dit que cette fonction est **croissante** sur cet intervalle. Une fonction croissante est une fonction qui **conserve l'ordre des images** :
Si a et b sont deux nombres tels que $a < b$, Alors $f(a) < f(b)$.



Fonction croissante sur l'intervalle [0;3] : si a<b, alors f(a)<f(b).

6.2.2 Fonction décroissante

Si, sur un intervalle de l'axe des abscisses, la courbe d'une fonction **descend**, Alors on dit que cette fonction est **décroissante** sur cet intervalle. Une fonction croissante est une fonction qui **change l'ordre des images** :
Si a et b sont deux nombres tels que $a < b$, Alors $f(a) > f(b)$.



Fonction décroissante sur l'intervalle [3;4] : si a<b, alors f(a)>f(b).

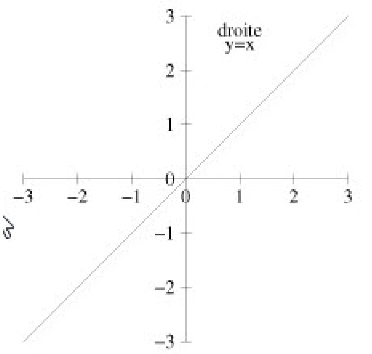
6.3 Tableau de variation

1. On écrit sur la première ligne les valeurs de x pour lesquelles le sens de variation change. 2. En dessous, on symbolise par des flèches les variations de f. 3. Aux extrémités des flèches, on écrit les valeurs prises par la fonction.

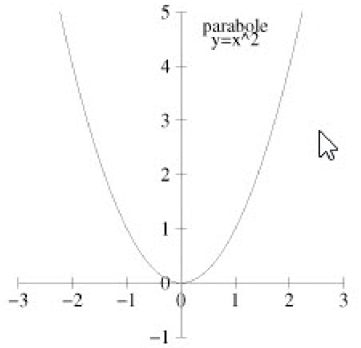
x	-5		-1		0		$+1$		$+7$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	25	$\searrow$	0		49	$\searrow$	$10 \quad 10$	$\nearrow$	3

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

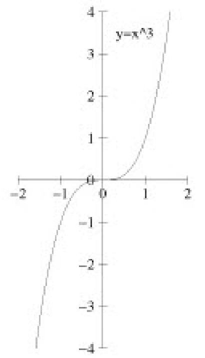
7 Fonctions usuelles



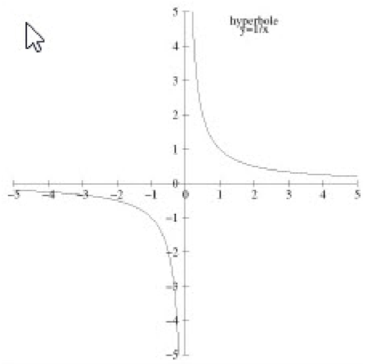
$y = x \quad (x \in \mathbb{R})$



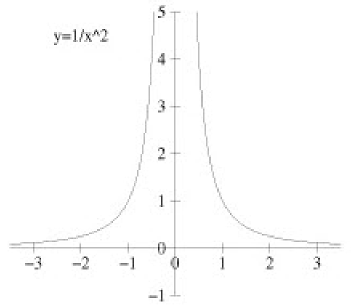
$y = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$



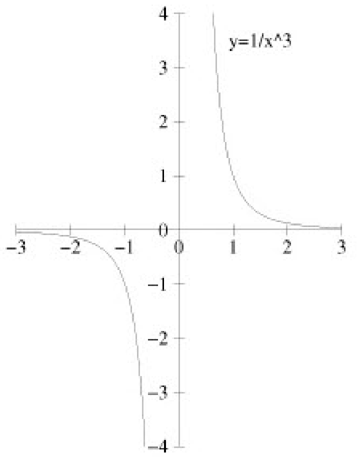
$y = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$



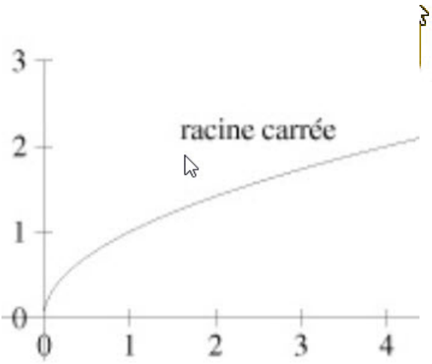
$y = 1/x = x^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}^*)$



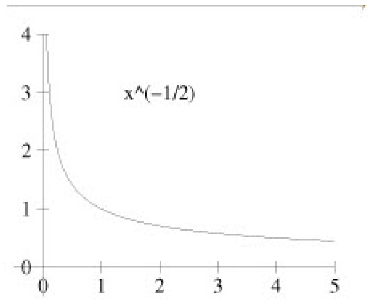
$y = 1/x^2 = x^{-2} \quad (x \in \mathbb{R}^*)$



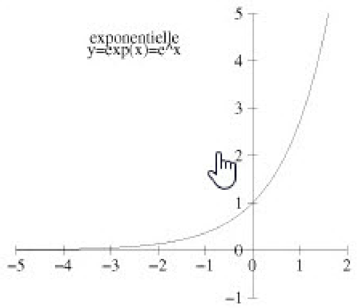
$y = 1/x^3 = x^{-3} \quad (x \in \mathbb{R}^*)$



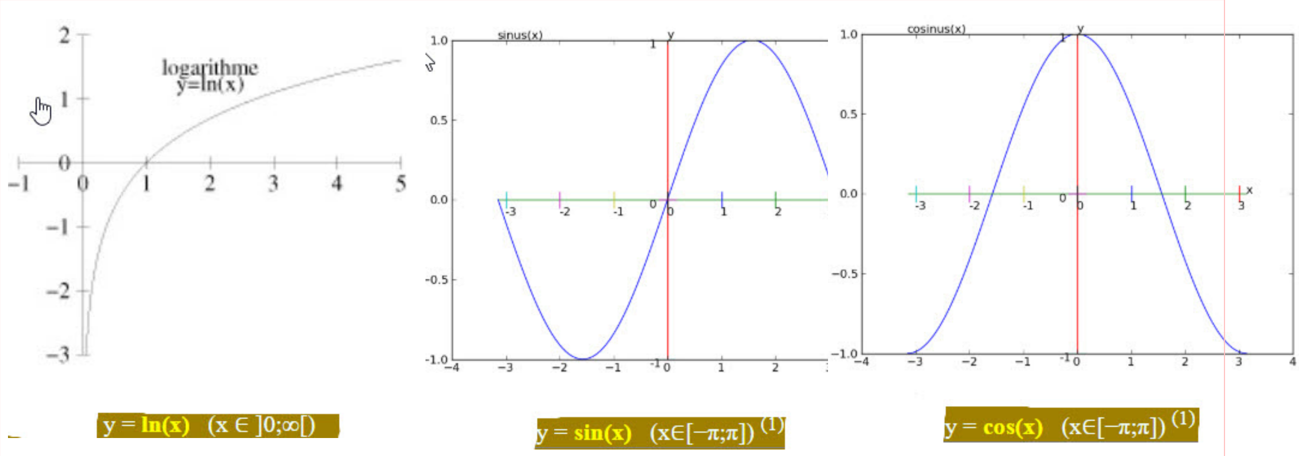
$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad (x \in [0;\infty[)$



$y = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2} \quad (x \in]0;\infty[)$



$y = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$



8 Étude de fonction Niveau II

8.1 Étude des variations d'une fonction

8.1.1 Méthode

1. On calcule sa dérivée.

2. On étudie le signe de la dérivée (en résolvant une inéquation).

3. On dessine un tableau comme ci-dessous :

x	-5		-1		0		$+1$		$+7$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	25	$\searrow$	0		49	$\searrow$	$10 \quad 10$	$\nearrow$	3

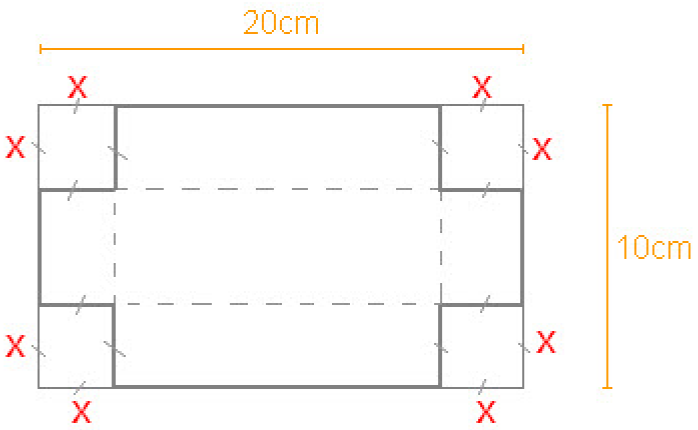
4. On écrit sur la première ligne les valeurs de x pour lesquelles $f'(x)$ change de signe.

5. On remplit la deuxième ligne avec des $+$ ou des $-$.

6. On remplit la troisième ligne avec des flèches qui montent lorsque $f'(x) > 0$ pour les valeurs de x situées sur la première ligne, ou qui descendent lorsque $f'(x) < 0$.

8.1.2 Exemple La fonction $f : x \longmapsto 4x^3 - 60x^2 + 200x$

Énonce



Dans le chapitre précédent, nous avions besoin de connaître les variations de la fonction $f(x) = x(20-2x)(10-2x)$ afin de trouver la valeur de x permettant de construire une boite de volume maximal à partir d'un support rectangulaire de dimensions 20*10 cm.
La fonction $f(x) = x(20-2x)(10-2x)$ s'écrit aussi $f(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$.

Procédure : $f(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$

1. **On calcule la dérivée**

$f'(x) = 12x^2 - 120 + 200$

2. **On étudie le signe de la dérivée (en résolvant une inéquation).**

On doit résoudre l'inéquation $12x^2 - 120 + 200 > 0$

- On calcule delta : $\Delta = b^2 - 4ac = 4800$
- $\Delta > 0$, il existe donc deux solutions

On calcule les solutions :

- $x_1 = \frac{-b}{-}\sqrt{\Delta}2a \Rightarrow 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$
- $x_2 = \frac{-b}{+}\sqrt{\Delta}2a \Rightarrow 5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$

3. **On réalise le tableau de variations**

On étudie le signe de la fonction dérivée sur le domaine d'application

- $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\infty; 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right] \cup \left]5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}; +\infty\right[$.
- $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $\left[5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}; 5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}\right]$.

x	$-\infty$		$5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$		$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	.	$\nearrow$	.	$\searrow$	.	$\nearrow$	.

Solution du problème :

On voit que sur l'intervalle $]0,5[$ correspondant aux valeurs de x possibles pour construire la boîte,

- f est croissante de $\Rightarrow$ 0 à $5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$
- f est décroissante de $\Rightarrow$ $5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$ à 5.

Elle admet donc un maximum pour $x = 5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$

C'est cette valeur (environ 2,11) qu'il faudra utiliser pour dessiner le patron.

On obtiendra un volume de $f(5-\frac{5}{3}\sqrt{3})$, soit $192.45cm^3$.

9 Les limites

9.1 Limites usuelles

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ (p>0)
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$	–
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} = 0$ (p>0)	-
$\lim\limits_{n\to\infty} k = k$	-	-	-

9.2 Opérations sur les limites

9.2.1 Limite de $U + V$

SI	$\lim\limits_{u\to+\infty} =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et	$\lim\limits_{v\to+\infty} =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ALORS	$\lim\limits_{v\to+\infty} = u+v$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

9.2.2 Limite de $U * V$

SI	$\lim\limits_{u\to+\infty} =$	l	$l \neq 0$	0	∞
et	$\lim\limits_{v\to+\infty} =$	l'	∞	∞	∞
ALORS	$\lim\limits_{v\to+\infty} = u * v$	$l * l'$	∞	$F.I.$	∞

9.2.3 Limite de $\frac{u}{v}$

SI	$\lim\limits_{u\to+\infty} =$	l	$l \neq 0$	l	∞	0	∞
et	$\lim\limits_{v\to+\infty} =$	$l' \neq 0$	0	∞	l'	0	∞
ALORS	$\lim\limits_{v\to+\infty} = \frac{u}{v}$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	$F.I.$	$F.I.$

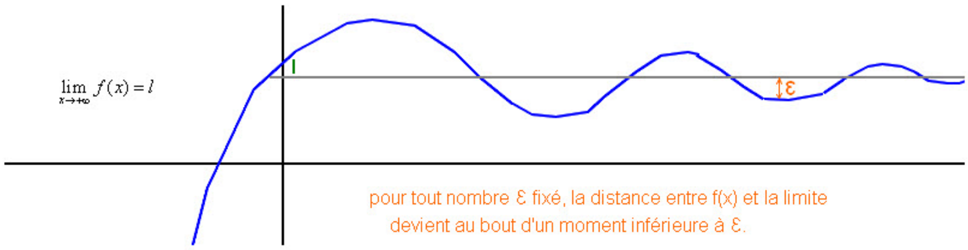
9.2.4 Limite de $\frac{1}{U}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n}$
l avec $l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

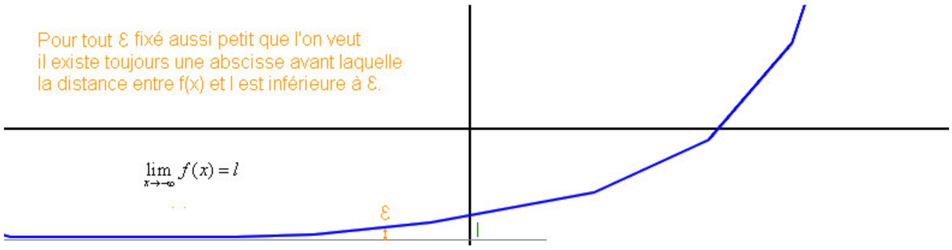
9.3 Limite de fonction

9.3.1 Limite finie en l'infini

On dit qu'une fonction admet une limite finie l en $+\infty$ si pour tout nombre ε fixé à l'avance, aussi petit que l'on veut, il existe un x à partir duquel la distance entre $f(x)$ et 1 (que l'on peut noter $|f(x)-1|$) est inférieure à ε.



De même, en $-\infty$, $lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = l$ si $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0$ tel que $\forall\varepsilon < x_0\ |f(x) - 1| < \varepsilon$.



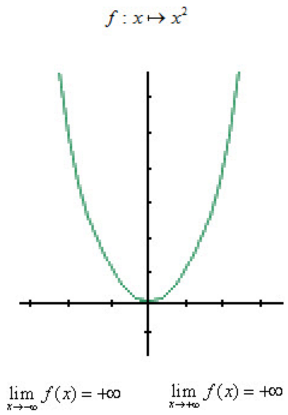
<u>**Exemples :**</u>

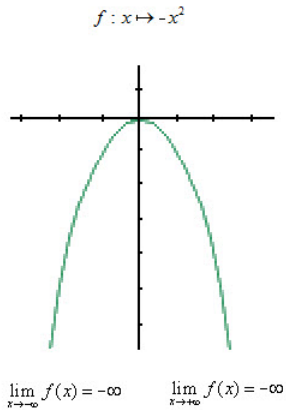
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^{2-5x+4}}{3x^2-2x+1} = 2$

9.3.2 Limite infinie en l'infini

On dit qu'une fonction a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre M fixé à l'avance, aussi grand que l'on veut, il existe un X à partir duquel toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieures à M.

Il existe des définitions similaires (limite $+\infty$ ou $-\infty$) pour la limite en $-\infty$.





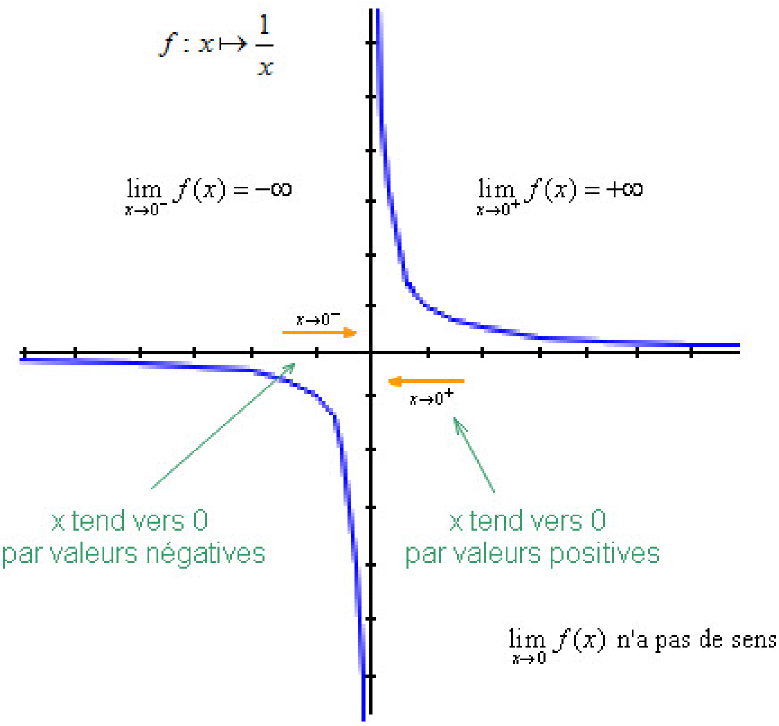
9.3.3 Limite en une abscisse x=a.

Il est aussi possible de parler de limite locale en $x = a$, avec a un nombre réel.

SI la fonction est continue (ce qui signifie qu'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon), on a toujours limite fonction continue $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$

SINON, on doit introduire la limite à gauche et la limite à droite de la fonction en $x = a$.

Pour différencier ces deux limites, on place un + ou un − en exposant à côté de a.



9.4 Calcul de limite

Pour calculer la limite d'une fonction, il faut repérer les fonctions usuelles (x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$) qui la compose et utiliser leurs limites connues et les opérations sur les limites.

Les règles (somme, différence, produit ou quotient de limites) sont les mêmes que celles du calcul des limites de suites.

9.4.1 Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+3=+\infty$,car c'est la limite d'une somme de fonctions qui tendent vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+3=+\infty$,Il y a une forme indéterminée. Il faut factoriser par x.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$,car c'est la limite d'un produit de fonctions qui tendent vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{2}{x-1}=+\infty$,car c'est de la forme $\frac{2}{0^+}$ (0 par valeurs positives)..

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{4X^2+5x+6}=\frac{1}{4}$, Il y a une forme indéterminée, il faut factoriser par X^2 en haut et en bas.

9.4.2 Limite d'une fonction composée

Une fonction composée est une fonction formée par une fonction qui en contient une autre.

Exemple :

- $f(x)=(2+\frac{1}{x})^3$

Nous avons $f(x)=u(v(x))$ avec $u(x)=x^3$ et $v(x)=2+\frac{1}{x}$

- $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

Nous avons $g(x)=a(b(x))$ avec $a(x)=\sqrt{x}$ et $b(x)=x^2+1$

On note $f=u\circ v$ et $g=a\circ b$

Pour calculer la limite d'une fonction composée, on commence par calculer la limite de la fonction qui est à l'intérieur de l'autre (notons L cette limite), puis on calcule la limite quand X tend vers L de la fonction qui englobe l'autre.

Exemples :

- Pour $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x})^3$, on a $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x})=2$ et $\lim\limits_{x\to2} x^3=8$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x})^3=8$.

- Pour $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}$, on a $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}=+\infty$.

9.4.3 Forme indéterminée de la forme 0÷0

Cette forme indéterminée apparaît par exemple dans le calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$
Dans ce cas, on peut utiliser la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point.
En effet, comme $f'(a) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ On a aussi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x} = f'(a)$
-Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = f'(3)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$
- Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

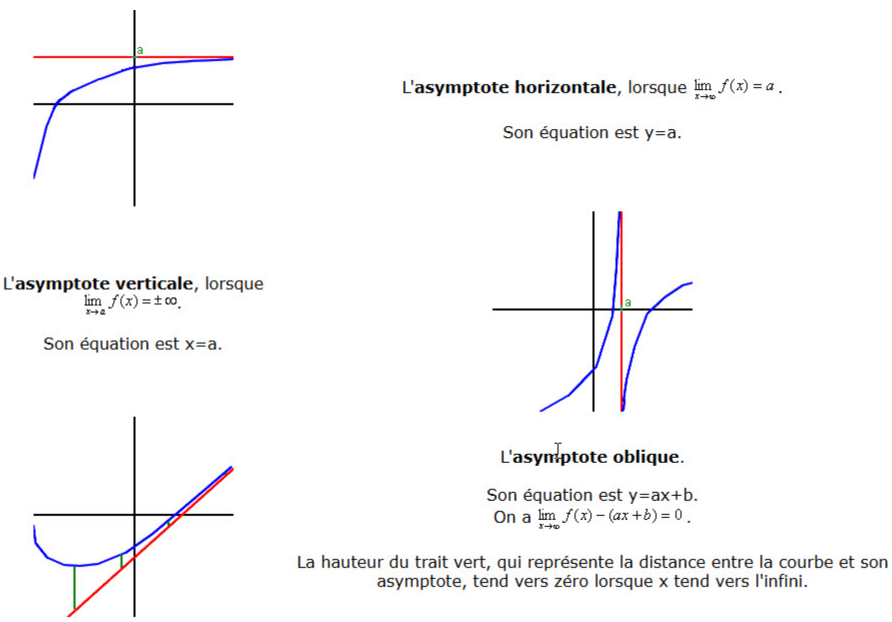
9.4.4 Forme indéterminée avec une racine carrée

Quand il y a une forme indéterminée avec des racines carrées, par exemple pour $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$, on peut essayer de faire apparaître l'expression conjuguée. **Rappel** : L'expression conjuguée d'une somme $a+b$ est la différence $a-b$.
Cela a pour effet de supprimer les racines carrées qui nous gênent, en utilisant la troisième identité remarquable.
Pour cet exemple, on obtient :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{x(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$$

9.5 Interprétation graphique des limites : les asymptotes

Une **asymptote** à une courbe est une droite qui se rapproche de plus en plus de la courbe sans jamais la toucher.
Il existe 3 types d'asymptotes.



10 Fonction N3

10.1 La fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre e à la puissance x.

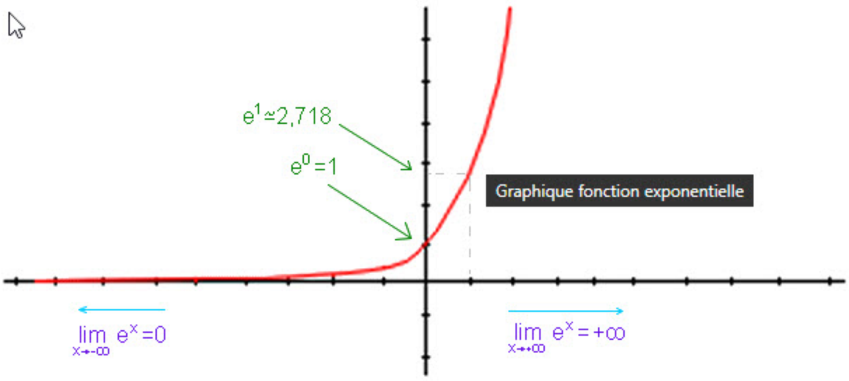
Propriétés

- Comme $e > 0$, on a toujours $ex > 0$. - La fonction exponentielle vérifie les propriétés sur les puissances, en particulier :

$e^0 = 1$, $e^{a+b} = e^a * e^b$ et $(e^a)^n = e^{a*n}$

- La fonction exponentielle est toujours égale à sa fonction dérivée. On peut le vérifier graphiquement en comparant le coefficient directeur de la tangente à sa courbe, pour un x pris au hasard, avec ex. - Comme elle ne prend qu'une fois chaque valeur de Nombres réels positifs,

SI $ea = eb$, ALORS $a = b$ (pratique pour résoudre certaines équations).



Limites particulières :

- $\lim_{x\to\infty} xe^x = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

10.2 La fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien (notée ln) est la réciproque de la fonction exponentielle : c'est la fonction telle que pour tout nombre a, $ln(e)^a = a$ et pour tout nombre $a > 0$, $e^{ln(a)} = a$.

Son ensemble de définition est $]0;+\infty[$ car la fonction exponentielle ne prend jamais de valeurs négatives.

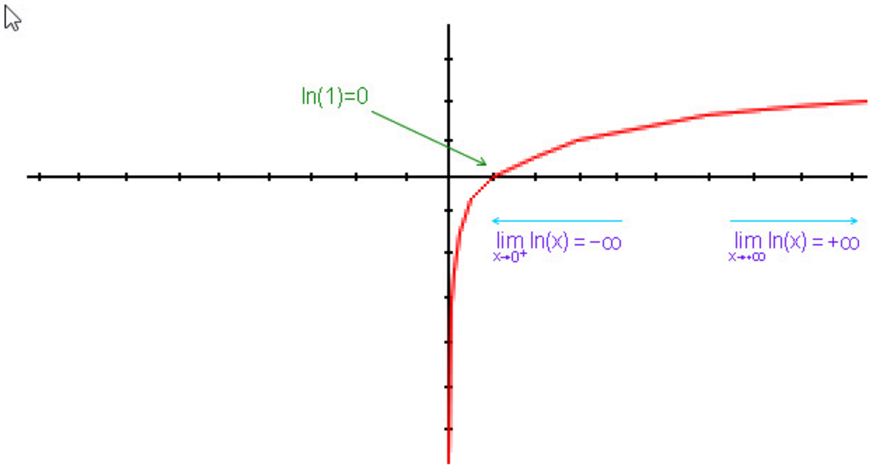
Propriétés

- $ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$.

- La fonction ln transforme des produits en sommes : $ln(a*b) = ln(a)+ln(b)$ (démonstration) et des quotients en différences.

- $ln(a)^n = nln(a)$ car $ln(a)^n = ln(a**a*a...*xa) = ln(a+ln(a)+...+ln(a) = nln(a)$

- La fonction lna pour dérivée la fonction fonction inverse. On peut le vérifier graphiquement.WP-CMS



Limites particulières :

$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

10.3 Dérivée d'une fonction composée

Formule

La dérivée d'une fonction composée de la forme $h = f \circ g$ est $h' = f' \circ g * g'$

Exemple

Calcul de la dérivée de $h(x) = \sqrt{5x^2+3}$

- On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 5x^2+3$. Alors $h = f \circ g$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x) = 10x$.
- $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} * 10x = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}}$.

Conséquence : autres formules utiles

Dérivée de $\sqrt{u}$	$(\sqrt{U}=)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
Dérivée de U^n	$(U^n)' = nU'U^{n-1}$
Dérivée de e^u	$(e^u)' = U'e^u$
Dérivée de $ln(U)$	$(lnU)' = \frac{U'}{U}$

10.4 Théorème des valeurs intermédiaires

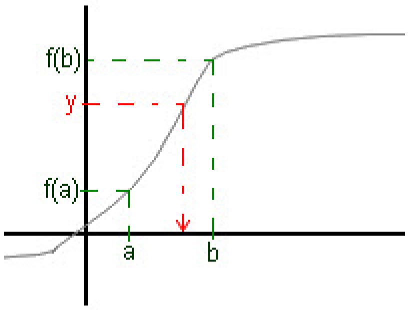
Ce théorème permet de démontrer qu'une équation $f(x) = a$ admet une solution dans un intervalle donné.

Fonction continue

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle si pour les valeurs de x parcourant cet intervalle, on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.
Cela revient à dire que pour tout nombre a de cet intervalle, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires

SI une fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$, ALORS pour nombre y de l'intervalle $\left[f(a), f(b)\right]$ l'équation équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



SI de plus la fonction est strictement monotone (strictement croissante ou décroissante) sur $[a, b]$ ALORS la solution est unique.

11 Baccalauréat 2024

11.1 Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}ln x$
ou ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$,
on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Section [1]

- a - Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 0} ln\, x = -\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} ln(x) = -\infty$ [par produit].

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ [par somme]

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2} ln(x) = +\infty$ [par produit]

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ [par somme]

- b - Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

On a admis que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$\Rightarrow \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \dfrac{2x}{2x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

- c - Étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$,
- $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$
- et $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$\Rightarrow \quad \forall x$ appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

- c - Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.

On a admis que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$
- $f''(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow$ $\forall x$ appartenant à $]0;+\infty[$, $f''(x) \leqslant 0$ car $2x^2 > 0$, donc f est **concave** sur $]0;+\infty[$.

[Section 2]

- a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1;2]$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$			

- Sur $]0;+\infty[$, f est **continue** (car dérivable) et **strictement croissante**.
- D'autre par : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$

D'après **le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**,
$\Rightarrow$ **l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution** α **sur** $]0;+\infty[$.

- $f(1) = 1 - 2 + \dfrac{1}{2} ln(1) = -1 < 0$
- $f(2) = 2 - 2 + \dfrac{1}{2} ln(2) = \dfrac{1}{2} ln(2) > 0$ car $2 > 1$

$\Rightarrow$ $f(1) \leqslant 0 \leqslant f(2)$ donc $f(\alpha) \leqslant f(2)$ donc $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ car f est croissante sur $]0;+\infty[$

Donc $\alpha \in [1;2]$

- b - Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variations de la question précédente, on peut déduire la tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- **c** - Montrer que $ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

On a $f(a) = 0$ donc $\alpha - 2 + \frac{1}{2}ln(\alpha) = 0$ d'où $\frac{1}{2}ln(\alpha) = 2 - \alpha$
Ainsi, $ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

11.2 Partie C : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur l'intervalle $]0;1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 lnx$
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

[1]
- **a** - Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf(\frac{1}{x})$.

[2]
- **a** - Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $0; \frac{1}{\alpha}$, on a $f(\frac{1}{x}) > 0$

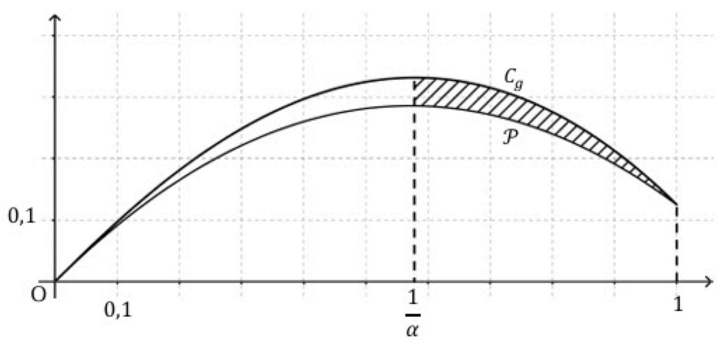
- **b** - On admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$		$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	.	↗	.	↘	.	↗	.

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0;1]$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

11.3 Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :
- La courbe C_g de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes C_g et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

[1]

- a - Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0;1]$.

- b - Démontrer l'égalité : $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \, ln \, x \, dx = \dfrac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

[2]

- a - En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.