WP-CMS

π

Mathématiques

Géométrie

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

$\longmapsto Document de référence$

1 Plan du document

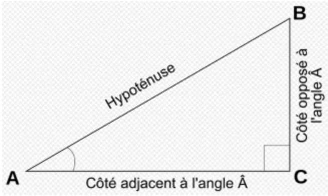
2 Bases de la géométrie

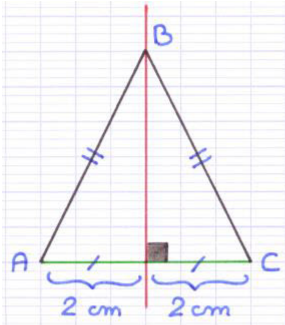
La **trigonométrie** est la partie des mathématiques qui fait le lien entre les **longueurs** des côtés d'un triangle rectangle et les mesures de ses **angles**.

2.1 Droites particulières

Dans un triangle rectangle

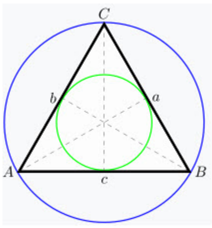
- Dans un triangle, la **somme des angles** fait toujours 180°
- La somme de deux angles **complémentaires** = 90°
- La somme de deux angles **supplémentaires** = 180°





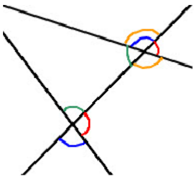
Dans un triangle isocèle

- Les 2 cotés de même longueur et angles adjacents à la base égaux.
- $p = 2a + b$
- $S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$
- SI l'angle en $\widehat{A}$ d'un triangle isocèle vaut 300 ALORS l'angle $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ vaut 75°



Dans un triangle équilatéral

- Les 3 cotés de même longueur et tous les angles sont égaux 60°.
- $p = 3a$
- $S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

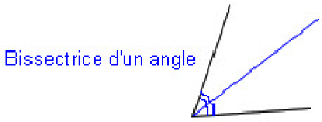


Types d'angle

- Angles **opposés par le sommet** ORANGE - Angles **correspondants** ROUGE
- Angles **alternes – externes** BLEU

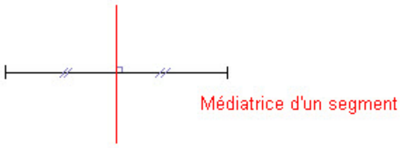
La bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui divise cet angle en deux angles égaux.



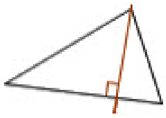
La médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui passe par son milieu.



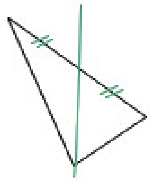
La hauteur

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui coupe son côté opposé en formant un angle droit.



La médiane

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu..



2.2 Points particuliers d'un triangle

Dans un triangle sont concourantes,

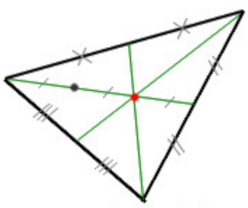
- les 3 bissectrices issues des angles se coupent toujours en un même point
- les 3 hauteurs, les 3 médianes, et les 3 médiatrices d'un triangle

Le point d'intersection des médianes s'appelle le **centre de gravité** du triangle. Il est situé exactement aux 2 tiers des médianes lorsque l'on part des sommets.

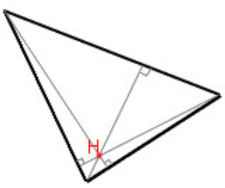
Le point d'intersection des hauteurs s'appelle **l'orthocentre** du triangle.

Le point d'intersection des médiatrices n'a pas de nom, mais c'est sur ce point qu'on doit placer la pointe d'un compas pour tracer le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle, appelé cercle circonscrit au triangle.

Enfin, **le point d'intersection des bissectrices** n'a pas de nom non plus, mais il permet de construire le plus grand cercle qu'on peut placer à l'intérieur du triangle, appelé le cercle inscrit.

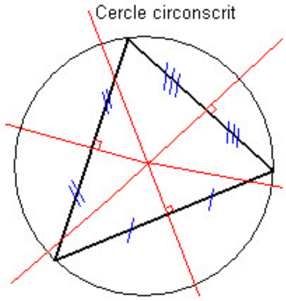


centre de gravité
(en rouge)

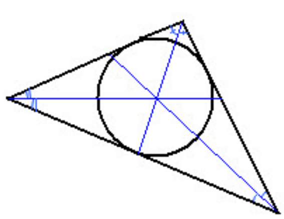


orthocentre H

Cercle circonscrit



Cercle inscrit



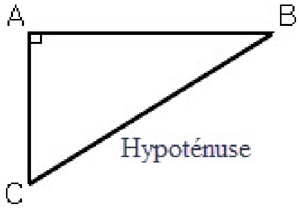
3 Pythagore

3.1 Théorème de Pythagore

Le théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Dans le triangle ABC rectangle en $A \Rightarrow$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$



3.2 Utiliser le théorème de Pythagore

Pour utiliser le théorème de Pythagore, on doit connaître les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

<u>**Méthode**</u>

1 - Écrire l'égalité. Par exemple $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2 - Remplacer les côtés connus par leur longueur. Par exemple, $4^2 + AC^2 = 7^2$.

3 - Calculer les carrés de ces nombres. Exemple : $16 + AC^2 = 49$

4.- Utiliser les règles sur les équations. Exemple : $AC^2 = 49 - 16$.

5.- Calculer l'autre côté. On obtient $AC^2 == 33$.

6 - Calculer la racine carrée du résultat obtenu. AC mesure environ $5,74$ cm.

Remarque : Le théorème de Pythagore est particulièrement utile pour calculer des longueurs qu'on ne peut pas mesurer, comme des grandes distances sur la Terre ou dans l'espace (astronomie).

3.3 Réciproque du théorème de Pythagore

Le théorème

Question : le triangle ABC ci-contre est-il rectangle ?

Méthode :

On calcule séparément AC^2 et $AB^2 + BC^2$ et on compare les résultats obtenus.

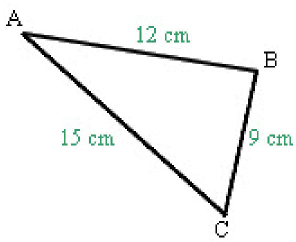
On conclut.

$AC^2 = 15^2 = 225$

$AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$.

On a bien $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en B**.



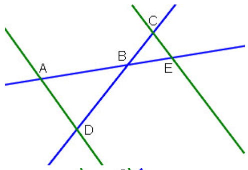
4 Thalès

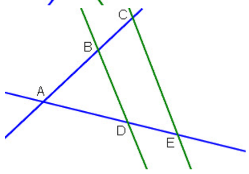
Pour utiliser le théorème de Thalès

On doit être en présence

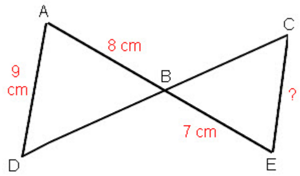
- de deux droites **parallèles** (vert)

- coupées par deux droites **sécantes** (bleu).

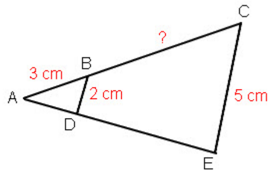




On doit connaître au moins trois longueurs dans ce type de figure.



On pourra calculer CE.



On pourra calculer AC et en déduire BC.

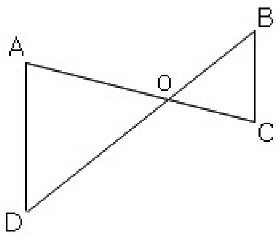
4.1 Théorème de Thalès

SI A, O, B, C, D sont cinq points tels que :

- (AD) et (BC) sont parallèles

- (AC) et (DB) se coupent en O

ALORS $\boxed{\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AD}{BC}}$

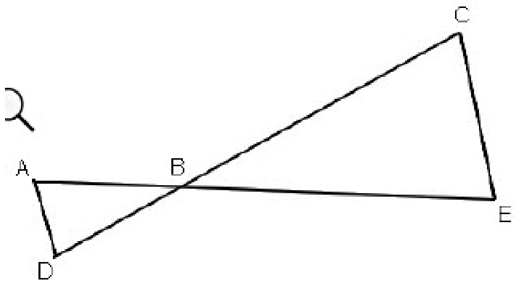


Note : $OD < OB$ et $OA < OC$ et pour les parallèles $AD < BC$

4.2 Comment utiliser le théorème de Thalès

Méthode

1. Énoncer le théorème et on écrit les rapports égaux.
2. Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs numériques et on raye le rapport inutile.
3. Réaliser un produit en croix.



On part de B

On choisit la droite AE

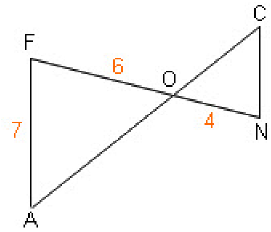
$$\frac{BA}{BE} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{CE}$$

Méthode

Pour écrire les rapports égaux :

1. Repérer le point d'intersection des deux droites non-parallèles.
2. Choisir l'une des deux droites qui passe par ce point.
3. Rester sur cette droite et en partant toujours de ce point et écrire le rapport de la plus petite longueur par la plus grande.
4. Faire de même sur l'autre droite qui passe par ce point.
5. Écrire le rapport de la plus petite longueur par la plus grande sur les deux droites parallèles.

Remarque : On peut aussi écrire les rapports des grandes longueurs par les petites, mais dans ce cas, il faut bien le faire pour les trois rapports.



Calculer CN

$$\frac{OC}{OA} = \frac{ON}{OF} = \frac{CN}{FA}$$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{4}{6} = \frac{CN}{7}$$

ALORS

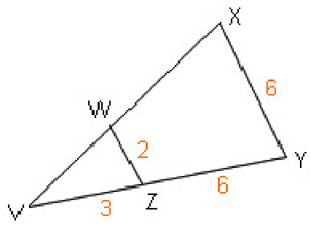
$CN = (7 * 4) \div 7 \approx 4,7cm$

4.3 Comment utiliser la réciprocité du théorème de Thalès

La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles (ou qu'elles ne le sont pas).

Méthode

Pour démontrer que les droites ci-dessus (XY) et (WZ) sont parallèles,



on calcule séparément les rapports $\frac{VZ}{VY}$ et $\frac{WZ}{XY}$

et on montre qu'ils sont égaux

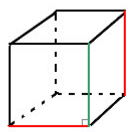
$$\frac{WZ}{VY} = \frac{3}{3+6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{WZ}{XY} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5 Géométrie dans l'espace

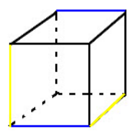
5.1 Droite dans l'espace

Dans l'espace, on peut tracer des droites.

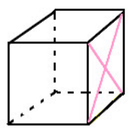
Dans l'espace, deux droites peuvent être :
- **parallèles**.
- **sécantes** si elles se coupent en un point.
- ni parallèles ni sécantes (à la différence des droites d'un plan qui sont toujours soit parallèles soit sécantes).
- **perpendiculaires** (et donc sécantes) si elles se coupent en formant un angle droit.
- **orthogonales** s'il existe une parallèle à la première qui est perpendiculaire à la deuxième.



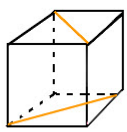
Les droites rouges sont orthogonales.



Les droites bleues sont parallèles.
Les droites jaunes sont orthogonales.



Les droites roses sont sécantes et perpendiculaires.

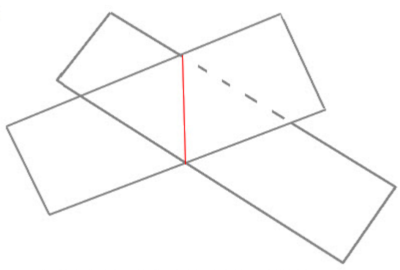


Les droites oranges ne sont ni parallèles ni sécantes.

5.2 Plan dans l'espace

Dans l'espace, il y a une infinité de plans.

Deux plans de l'espace peuvent être :
- **Parallèles** et distincts.
- **Parallèles** et **confondus**.
- **Non parallèles**. Dans ce cas, ils sont . Leur intersection est une droite.

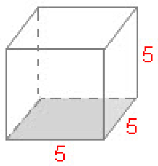


Les deux plans ci-dessus sont sécants.
Leur intersection est une droite.

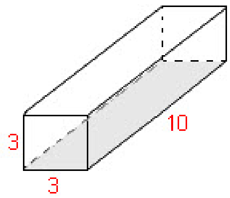
5.3 Les solides

5.3.1 Volume d'un cube, d'un pavé et d'un prisme

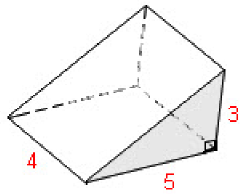
Pour calculer le volume d'un cube, d'un pavé ou d'un prisme, il faut multiplier l'aire de sa base par sa hauteur. Il est donc important de bien connaître les formules des aires des figures planes.



$$V = \underbrace{5\times5}_{B}\times\underbrace{5}_{h} = 125\ cm^3$$



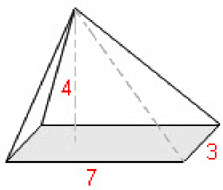
$$V = \underbrace{3\times10}_{B}\times\underbrace{3}_{h} = 90\ cm^3$$



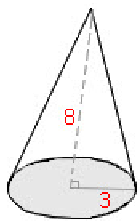
$$V = B\times h = \frac{5\times3}{2}\times 4 = 30\ cm^3$$

5.3.2 Volume d'un cône et d'une pyramide

Pour calculer le volume d'un cône ou d'une pyramide, on multiplie l'aire de sa base par sa hauteur, puis on divise le résultat obtenu par 3.



$$V = \frac{7\times3\times4}{3} = 28\ cm^3$$



$$V = \frac{\pi\times3^2\times8}{3} = 24\pi \approx 75\ cm^3$$

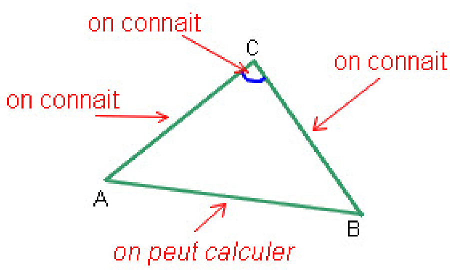
6 Le théorème d'Al-Kachi

Le théorème **d'Al-Kashi** permet de calculer des longueurs dans un triangle quelconque lorsqu'on connaît la mesure d'un angle et les longueurs des côtés adjacents à cet angle.

Le théorème d'Al-Kashi est plus puissant que le théorème de Pythagore, car il ne nécessite pas la présence d'un angle droit !

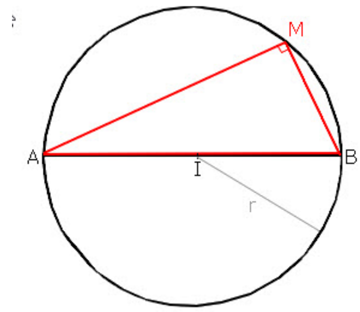
Dans un triangle ABC, on a toujours :

$AB\text{š} = AC\text{š} + BC\text{š} - 2 * AC * BC * cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$



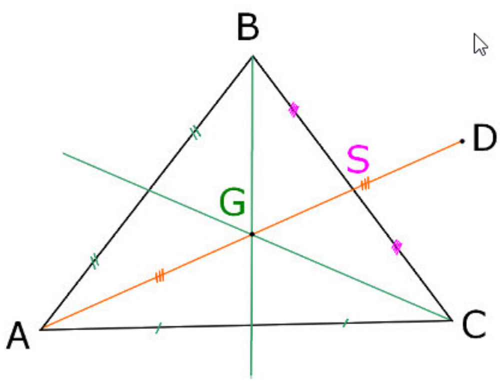
7 Le cercle et le triangle rectangle

Tout triangle formé par deux points du diamètre d'un cercle et un autre point sur le cercle est rectangle.
Autrement dit, un cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $(MA) \perp (MB)$.



8 Les médianes d'un triangle sont concourantes

Les **médianes** d'un triangle se coupent toutes au même point et ce point est situé aux deux tiers des médianes en partant des sommets.



9 La droite d'Euler

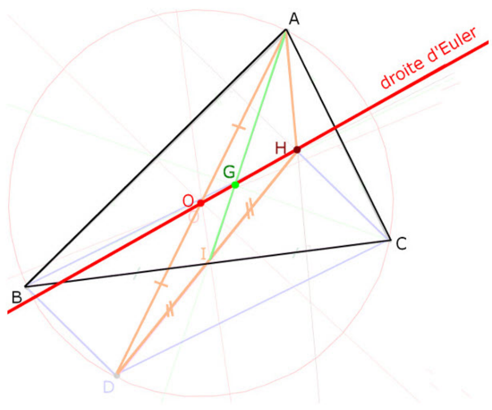
Dans un triangle ABC quelconque :

• le centre O du **cercle circonscrit**

• le **centre de gravité** G

• l'**orthocentre** H

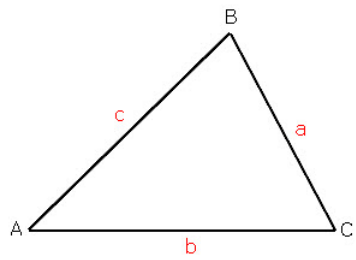
sont **toujours alignés**.



10 La loi des sinus

Dans un triangle ABC quelconque, SI on note $a = BC$, AC et AB, on a toujours :

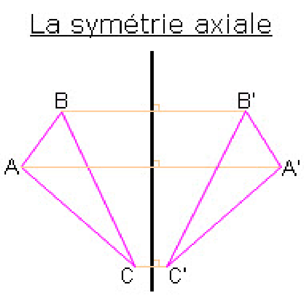
$$\frac{sin(\widehat{A})}{a} = \frac{sin(\widehat{B})}{b} = \frac{sin(\widehat{C})}{c}$$

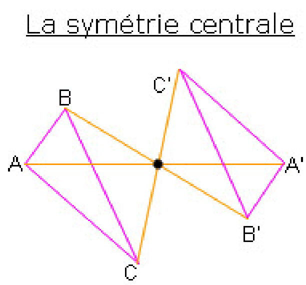


11 Les transformations du plan

11.1 Les symétrie

Une transformation du plan est une sorte de "fonction" qui, à tout point d'un plan, associe un autre point. - Une **symétrie axiale** est une transformation du plan. - Une **symétrie centrale** en est une autre.





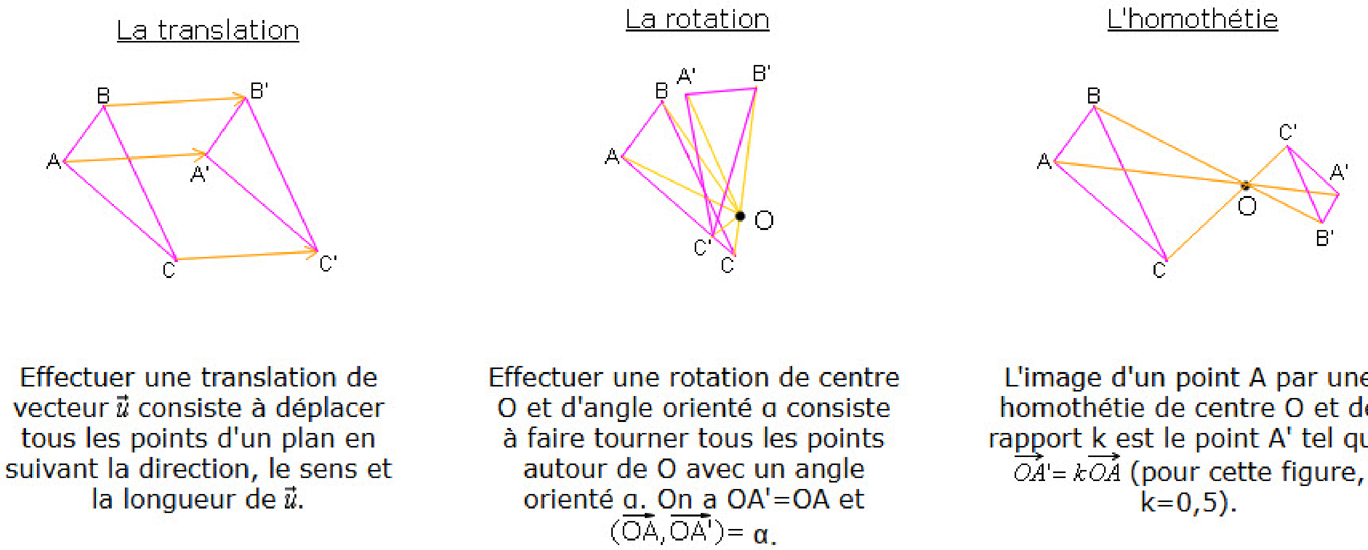
11.2 La translation, la rotation et l'homothétie

Voyons maintenant trois autres transformations :

- la **translation**,

- la **rotation**

- et l'**homothétie**.



11.3 Note

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation conservent les longueurs.

Par contre, une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par |k|, les aires par k² et les volumes par |k|3.

Par exemple, SI l'aire d'un triangle est de 100 cm², l'aire de l'image de ce triangle par une homothétie de rapport 3 est 900 cm².

Pimpim et Orphée veulent sortir du désert.

Ils parcourent **10** kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe
Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres ?

Notons u_n, la distance parcourue le $(n+1)^{ème}$ jour.
On a $u_0 = 10$, $u_1 = 9,5$, $u_2 = 9,025$ et d'une manière générale $U_{n+1} = 0,95U_n$
On peut calculer la somme de ses premiers termes (ce qui représente la distance totale parcourue) en fonction du nombre j de jours nécessaires pour sortir du désert.

$S = 10 * \dfrac{1-0,95^j}{1-0,95}$
$= 10 * \dfrac{1-0,95^j}{0,05}$
$= 200 * (1-0,95^j)$
$= 200 - 200 * 0,95^j)$

On doit donc résoudre l'inéquation
$= 200 - 200 * 0,95^j) > 150$
$-200 * 0,95^j > 150 - 200$
$0,95^j < \dfrac{-50}{-200}$
$0,95^j < 0,25$

$log0,95^j = nlog0,95 \Rightarrow j = \dfrac{log0,25}{log0,95}$
$0.95^{27} = 0,2503$ et $0.95^{28} = 0,2378$
donc l'inéquation est vraie à partir de $J = 28$
donc Pimpimp et Orphée ont besoin de 28 jours pour sortir du désert.