Mathématiques

Primitives

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

$\mapsto$ *Documentderéférence*

1 Plan du document

2 Primitive d'une fonction

La primitive d'une fonction f est une fonction F qui a pour dérivée f. Les primitives servent à calculer des intégrales (chapitre suivant).

3 Primitive de fonctions somme et produit

La primitive d'une somme de f	la somme des primitives de ces f
La primitive du produit d'un nombre par une f	le produit de ce nombre par la primitive de f.

Exemples A :

- $f \mapsto 3x^2$ à pour primitive $F \mapsto x^3$
- $f \mapsto \frac{1}{x^2}$ à pour primitive $F \mapsto \frac{1}{x}$

Exemples B :

- $f \mapsto 2x+3$ à pour primitive $F \mapsto x^2+3x$
- $f \mapsto 5cos(x)$ à pour primitive $F \mapsto 5sin(x)$

4 Primitive d'une fonction puissance

$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ avec C = n'importe quel nombre.

Exemples :

- $f \mapsto x^7$ à pour primitive $F \mapsto \frac{1}{8}x^8$
- $f \mapsto 3x^4$ à pour primitive $F \mapsto \frac{3}{5}x^5 + C$

5 Primitive d'un quotient

$f(x) = \left(\frac{u'}{u}\right)$	$ln\|u\|$.

Méthode 1. Chercher à repérer la forme $\frac{u'}{u}$.
2. Transformer l'écriture de la fonction en faisant apparaître la forme $\frac{u'}{u}$.
3. Appliquer la formule.

Exemples A :

- $f \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ à pour primitive $F \mapsto ln(x^2+1)$

Exemples BA :

- $f \mapsto \frac{2x2}{x^3+3}$ on pose $u(x) = x^3+3$ comme $u'(x) = 3x^2$
- $f(x) = 2 * \frac{x^2}{x^3+3} = 2 * \frac{3}{2} * \frac{x^2}{x^3+3} = \frac{2}{3} * \frac{2x^2}{x^3+3}$
- $F(x) = \frac{2}{3}ln(|x^3+3|+C)$

6 Primitives de fonctions composées

La difficulté consiste à reconnaître la présence de l'une de ces formules puis de transformer l'écriture de la fonction pour faire apparaître une fonction u et sa dérivée u'.

$f(x)$	$F(x)$.
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.	$\sqrt{u}$.
$nu'u^{n-1}$.	u^n.
$u'e^u$.	e^u.
$\frac{u'}{u}$.	$ln(u)$.
$F \circ g * g'$.	$f \circ g$.

Exemples A :

- $f \mapsto x(x^2+3)^4$ On reconnait la forme u^n
- Il faut u^n et u' pour faire apparaitre $nu'u^{n-1}$
- Posons $u(x) = (x^2+3)$ alors $u'(x) = 2x$
- On modifie l'écriture de f pour faire apparaitre $2x$
- $f(x) = \frac{1}{2} * 2x(x^2+3)^4 = \frac{1}{2}u'u^4$
- $F(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{5}u^5 = \frac{(x^2+3)^5}{10}$

7 Primitives de fonctions usuelles et Opération sur les fonctions

$f(x)$	$F(x)$.	Intervalle I.
a (constante)	$ax+C$.	$\mathscr{R}$.
X	$\frac{1}{2}x^2+C$.	$\mathscr{R}$.
$x^2 n \in \mathscr{Z}-(-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}x^2+C$.	$\mathscr{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty;0[ou]0;+\infty[$ si $n<-1$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$.	$]-\infty;0[ou]0;+\infty[$.
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$.	$]0;+\infty[$.
$\frac{1}{x}$	$ln\|\|x\|\|+C$.	$\mathscr{R}-]0;+\infty[$.
e^x	e^x+C.	$\mathscr{R}$.
$sin(x)$	$-cos(x)+C$.	$\mathscr{R}$.
$cox(x)$	$sin(x)+C$.	$\mathscr{R}$.
$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}$	$tanx+C$.	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;+\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathscr{Z}$.
$ln(x)$	$x(ln\,x-1)+C$.	$]0;+\infty[$.

$f(x)$	$F(x)$.	Conditions.
$u'+v'$	$ax+C$.	$\mathscr{R}$.
λu’	$\lambda u+C$.	λ réel.
$u'v+uv'$	$uv+C$.	..
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+C$.	$\forall$ x dans I, $v(x)=0$.
$(u'\circ v)v'$	$(u\circ v)+C$.	$\forall$ x dans I, $v(x)=0$.
$u'u^n$ avec $n\in\mathscr{Z}-(-1)$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}+C$.	Lorsque$n<-1$ $\forall$ x dans I, $u(x)=0$.
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+C$.	$\forall$ x dans I, $u(x)=0$.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$.	$\forall$ x dans I, $u(x)=0$.
$\frac{u'}{u}$	$ln\|\|u\|\|+C$.	$\forall$ x dans I, $u(x)>0$ $\forall$ x dans I, $u(x)<0$.
$u'e^u$	e^u+C.	..
$x\mapsto u(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b)+C$.	u primitive de u sur I.

LeC montre qu'il existe une infinité de primitive car en dérivant la primitive on retrouve toujours la même dérivée.

8 Modèles

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ (p>0)
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$	–
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} = 0$ (p>0)	-
$\lim_{n\to\infty} k = k$	-	-	-

<u>Méthode</u>

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction :

1. On dessine deux axes gradués perpendiculaires.
2. On choisit des valeurs de x comme on veut et on calcule les images $f(x)$ correspondantes.
3. Pour chaque x choisi, on se positionne en x sur **l'axe horizontal des abscisses** et on place un point ou une croix à la hauteur $f(x)$ **l'axe verticale des ordonnées**.
4. On relie les points obtenus de manière harmonieuse.