WP-CMS

π

Mathématiques

Intégrales

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

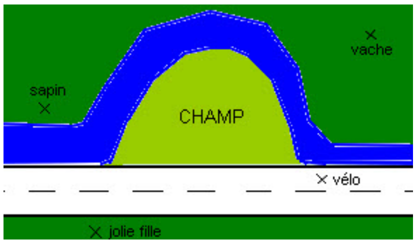
$\longmapsto Document de référence$

1 Plan du document

2 Préface

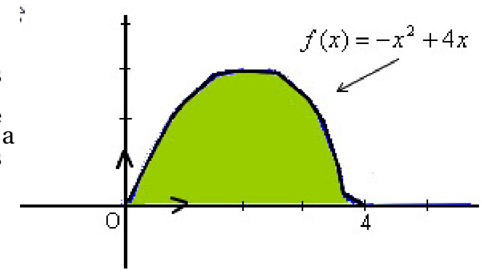
Les intégrales ont été inventées pour calculer les aires de figures non usuelles.
En effet, l'intégrale d'une fonction positive f entre un nombre $a$et un nombre b est l'aire de la partie du plan délimitée horizontalement par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ et verticalement par l'axe des abscisses et la courbe de f.
SI nous parvenons à calculer des intégrales de fonctions, nous pourrons donc calculer des aires exactes de figures délimitées par des courbes.

Le calcul de l'aire de ce champ fera intervenir une intégrale. a

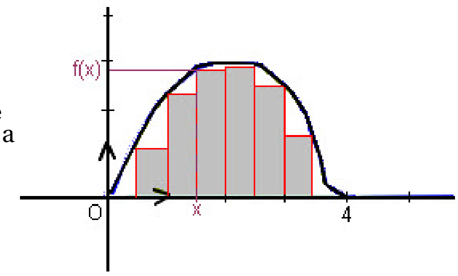


3 Aspect théorique et notations

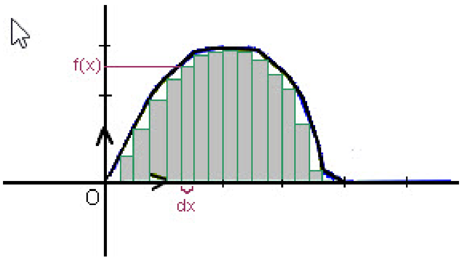
À l'aide de relevés de positions sur le terrain et de techniques de calcul hors programme terminale (méthodes de et de), il est possible de trouver une fonction dont la représentation graphique suit le cours de la rivière, après avoir placé le tout dans un repère. a



On peut approcher l'aire sous la courbe en calculant la somme des aires de rectangles placés en dessous. a



Plus il y a de rectangles, de petite largeur, plus l'approximation est bonne. a



En notant dx une longueur infiniment petite sur l'axe des abscisses, l'aire sous la courbe est la somme des aires d'une infinité de rectangles de longueurs dx et de hauteurs $f(x)$ à chaque fois, pour x variant de 0 à 4.

On note cette somme $I = \int_0^4$, ce qui se lit : "intégrale de f entre 0 et 4".

4 Calcul d'une intégrale

4.1 Par la formule

En notant F une primitive de f, on a : $I = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple :

$I = \int_0^4 -x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = (-\frac{1}{3} * 4^3 + 2 * 4^2) - (0) =$

$= -\frac{64}{3} + \frac{96}{3}$

$= \frac{32}{3}$

Comme $32 \div 3 \approx 10,67$, l'intégrale de f entre 0 et 4 fait environ $10,67$.

SI une unité du graphique correspond à 10 mètres sur le terrain,

ALORS une unité d'aire vaut 100 m^2 et l'aire réelle du champ mesure environ 1067 m^2.

SI on ne parvient pas à trouver une primitive de f, on peut tenter une **intégration par parties**.

4.2 l'intégration par parties

On utilise la formule suivante : $I = \int_a^b u'(x) * v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Exemple : $I = \int_0^\pi x\,cox(x)\,dx$

1 - On pose $u' = cos(x)$ et $v(x)x$

2 - Donc $u(x) = sin(x)$ et $v'(x) = 1$

3 - On calcul

$I = \int_0^\pi x\,cox(x)\,dx = [x\,sin\,x]_0^\pi = -\int_0^\pi sin(x)\,dx$

$=(\pi * sin(\pi)) - (0 * sin(0)) - [-cox]_0^\pi$

$=0 - (-cos(\pi) + cos(0))$

$=cos(\pi) - cos(0)$

$=-1 - 1 = -2$

5 Intégrale d'une fonction négative

Nous voyons ici qu'une intégrale peut être négative alors qu'une aire est toujours positive.

Cela se produit si la courbe est davantage en dessous de l'axe des abscisses qu'au dessus.

Si on veut calculer l'aire S de la surface bleue ci-dessus, il faut calculer :

$I = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

a