



Mathématiques

Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Suites numériques 1

Notations

Exemple : Suite des nombres impairs

Forme 1 : $u_n = 2n + 1$

Forme 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Forme 3 : Un algorithme pour Python

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n - 1 \end{cases}$
 $u_1 = -u_0 - 1 = -2 - 1 = -3$
 $u_2 = -u_1 - 1 = +3 - 1 = 2$

Suites arithmétiques

Définition

Si une suite **avance toujours d'un même nombre** (par exemple 5, 10, 15, 20...), c'est une **suite arithmétique**.
 Le nombre **r** tel que $u_{n+1} = u_n + r$ est appelé la **raison** de la suite.

Calcul des termes :

$$u_n = u_0 + nr$$

SI on connaît un terme quelconque et la raison.

Alors on peut calculer n'importe quel terme

→ $u_{20} = u_{10} + 10 \times r$.

On peut aussi retrouver la raison à partir de deux termes éloignés.

Si $u_3 = 10$ et $u_7 = 34$,

Alors la raison est 6 (4×6) car on a avancé de 24 ($34 - 10$) en 4 termes ($7 - 3$)

Exemples :

$$\begin{cases} u_7 = -3 \\ u_{10} = 3 \end{cases}$$

On a avancé de

$$u_{10} - u_3 = 3 - (-3) = 6$$

en $(10 - 7) = 3$ termes

La raison est $6/3 = 2$

$$u_2 = u_7 - 5r = -3 - (5 \times 2) = -13$$

Somme des termes :

$$s = \text{nbr de termes} \times \frac{(\text{1er} + \text{dernier termes})}{2}$$

Exemple :

Somme des 9 1er termes d'une suite arithmétique de 1er terme 17 et de raison 5?

$$u_8 = u_0 + (8 \times 5) = 57. S = 9 \times \frac{u_0 + u_8}{2} = 333$$

Suites géométriques

Définition

Une **suite géométrique** est une suite pour laquelle on **multiplie toujours par un même nombre** (par exemple : -2, 4, -8, 16, -32... est une suite géométrique de raison -2.)

Le nombre **q** tel que $u_{n+1} = u_n \times q$ est appelé la **raison** de la suite.

Calcul des termes :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple : $u_1 = u_0 \times q$

$$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q$$

$$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q \times q \times q$$

Calcul de q : $u_3 = 54$ et $u_5 = 486$; $u_5 = u_3 \times q^2$; $q^2 = 486 \div 54$; $q = \sqrt{9} = 3$

Somme des termes :

$$s = \text{1er terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}$$

Exemple :

Somme des 12 1ers termes d'une suite géométrique de 1er terme 3 et raison 2 ?

$$S = 3 \times \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = \frac{1 - 4096}{-1} = 12285$$

Sens de variation d'une suite

Suite définie par son terme général

Pour déterminer le sens de variation d'une suite définie par son terme général u_n en fonction de n:

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que le résultat est toujours > 0 (suite croissante) ou toujours < 0 (suite décroissante).

2. Calculer $R = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ montrer que R est

toujours > 1 (suite croissante)

ou strictement compris entre $0 < R < 1$ (suite décroissante).

3. Étudier les variations de la fonction associée (la suite et la fonction ont les mêmes variations).

Remarques sur les cas particulier des suites

Une suite **arithmétique** est croissante si sa raison est positive et décroissante si sa raison est négative.

Une suite **géométrique** de premier terme positif :

Si $q < 0$, la suite n'est ni croissante ni décroissante, car le signe des termes change à chaque fois.

Si $q = 0$, les termes valent tous 0 à partir du 2ème. Elle est donc constante à partir du 2ème terme.

Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante. En effet, si on multiplie un nombre positif par un nombre strictement compris entre 0 et 1, le résultat est plus petit que le nombre de départ.

Si $q = 1$, les termes sont tous égaux au premier terme. La suite est constante.



Mathématiques

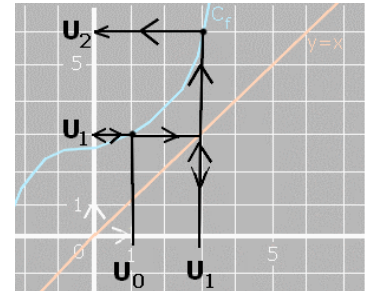
Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Si $q > 1$, la suite est croissante.

Suite définie par une relation de récurrence

1. Tracer le graphe de f associée et la droite d'équation $y=x$.
2. Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
3. Utiliser la courbe de f , on place u_1 sur l'axe des ordonnées.
4. Utiliser la droite d'équation $y=x$, reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
5. Utiliser u_1 sur l'axe des abscisses et C_f , on place u_2 sur l'axe des ordonnées.
6. Utiliser la droite d'équation $y=x$, on reporte u_2 sur l'axe des abscisses.
7. On recommence ces opérations.



Exemples

1. La suite u définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n-6$.

u est une suite arithmétique de raison négative donc u est décroissante.

2. La suite u définie par $u_n=3 \times 0,9^n$.

u est une suite géométrique de premier terme positif et de raison strictement comprise entre 0 et 1 donc u est décroissante.

3. La suite u définie par $u_n=n^2-1$.

Calculons $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=((n+1)^2-1)-(n^2-1)=n^2+2n+1-1-n^2+1=2n+1.$$

Comme $n > 0$, $2n+1 > 0$, donc $u_{n+1}-u_n > 0$ donc u est croissante.

4. La suite u définie par $u_n = \frac{0,5^n}{n}$.

Calculons $u_{n+1} \div u_n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{0,5^{n+1}}{n+1}}{\frac{0,5^n}{n}} = \frac{0,5^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{0,5^n} = 0,5 \times \frac{n}{n+1}$$

Comme $0,5 < 1$ et $n \div (n+1) < 1$, $u_{n+1} \div u_n < 1$ donc u est décroissante.

5. La suite u définie par $u_n=n^2+2n-3$.

Posons $f(x)=x^2+2x+3$.

La fonction dérivée de f , f' , fait $f'(x)=2x+2$.

Lorsque $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante donc u est croissante.



Mathématiques

Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Limites de suites

Limite d'une suite

Lorsqu'on regarde les termes d'une suite, s'intéresse à leur comportement lorsque n devient très grand ou très petit
Si les termes se rapprochent d'un **même nombre**. **Alors** la suite est **convergente**.

$$u_n = 10 - \frac{1}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 10$$

Si les termes se rapprochent d'un **plus grand nombre**. **Alors** la suite est **divergente** et sa limite $+\infty$

$$u_n = n. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

Si les termes se rapprochent d'un **plus petit nombre**. **Alors** la suite est **divergente** et sa limite $-\infty$

$$u_n = -n. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

Si les termes ne respectent aucune des conditions ci-dessus. **Alors** est **divergente** mais elle n'admet pas de limite.

$$u_n = (-1)^n$$

Propriétés

Si, à partir d'un certain rang, les termes d'une suite u sont toujours $>$ à ceux d'une suite v et **si** la limite de v est $+\infty$
alors la limite de u est aussi $+\infty$.

Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.

Si une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1

Alors elle converge toujours vers 0, quel que soit son premier terme.

Calcul de limite

Suites	Somme - Différence	Multiplication	Quotient
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = l$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = l'$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u + v = l + l'$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u * v = l + l'$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u/v = l/l'$ $l' \neq 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = l$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = \pm\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u + v = \text{cet } \infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u * v = \text{cet } \infty$ le signe du résultat suit la règle des signes pour un produit	$\lim_{n \rightarrow \infty} u/v = 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u + v = +\infty$ (idem pour $-\infty$)	$\lim_{n \rightarrow \infty} u * v = +\infty$ (idem pour $-\infty$)	
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = -\infty$	Forme indéterminée.		
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = \pm\infty$		Forme indéterminée.	
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = l$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = \pm\infty$			$\lim_{n \rightarrow \infty} u \div v = \infty$ $l \neq 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = l$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = 0$			$\lim_{n \rightarrow \infty} u \div v = \infty$ $l \neq 0$
Note -Nous avons les mêmes résultats pour la limite d'une différence, mais attention, si deux suites tendent vers le même infini, nous ne pouvons rien dire de la limite de leur différence, c'est également une forme indéterminée.:			Pour connaître le signe de cet infini on regarde si la suite tend vers 0 par valeurs positives (on écrit 0^+) ou par valeurs négatives (on écrit 0^-) et on utilise les règles des signes pour un quotient.
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = 0$			Forme indéterminée.
$\lim_{n \rightarrow \infty} u = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} v = \infty$			Forme indéterminée.



Mathématiques

Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Formes indéterminées

Forme $-\infty+\infty$ ou $+\infty-\infty$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 + 1$.

Il y a une forme indéterminée de type $+\infty-\infty$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Méthode

Quand il y a une forme indéterminée du type $+\infty-\infty$ ou $-\infty+\infty$:

1. On factorise l'expression par son terme de plus haut degré.
2. On utilise les règles de calcul sur la limite d'un produit.

Exemple :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 1 &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) \\ &= x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

tend vers $+\infty$ tend vers 1 tend vers 0 tend vers 0

Par produit de $+\infty$ et de 1 on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 + 1 = +\infty.$$

Forme $\infty \times 0$

Méthode

Dans ce cas, on peut essayer de multiplier les deux suites entre elles pour se ramener à un quotient.

Exemple

on fait apparaître un quotient règles de calcul sur les puissances (4ème) règle sur la limite d'un quotient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

car $\sqrt[n]{n} = n^{1/2}$

Forme $\infty \div \infty$

En général, cela se produit en présence d'un quotient de deux polynômes.

Dans ce cas, on factorise le haut et le bas par le terme de plus haut degré du polynôme le plus petit.

Exemples

- Pour $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x}$ on factorise par x^3 .

- Pour $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^5 + x^3 + x}$ on factorise par x^4 .

- Pour $\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ on factorise par x^2 .

Ensuite, on utilise les règles sur les limites d'une somme et d'un quotient.

Exemple de calcul

1. On factorise 2. On peut simplifier par x^3 car $x^3 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$ tend vers 0 règle sur la limite d'un quotient tend vers 1 tend vers 0 tend vers 1

Suites et récurrence

Vocabulaire

Si les termes se rapprochent d'un même nombre. Alors la suite est convergente (Fait d'aboutir au même point de rencontre.). $u_n = 10 - \frac{1}{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$	Exemples La suite définie pour tout $n > 0$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est croissante, monotone, majorée, minorée, bornée et convergente. Sa limite est 2 lorsque n tend vers $+\infty$.
Si une suite n'est pas convergente Alors elle est dite divergente.	Exemples La suite définie pour tout n par $u_n = \cos(n)$ est majorée, minorée, bornée et divergente
Deux suites adjacentes sont deux suites, l'une croissante, l'autre décroissante, telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$: les termes de u et v se rapprochent quand n tend vers ∞	



Mathématiques

Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Propriétés

On dit que la **suite u** est **majorée**

S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Le nombre **M** est alors appelé un **majorant** de la suite u.

La suite $(u_n)_{n>0}$ défini par $\forall n$ entier relatif, $u_n = 1/n$.
majorée par 1 car $\forall n$ entier relatif $\neq 0$ on a $u_n \leq 1$

On dit que la **suite u** est **minorée**

S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Le nombre **m** est alors appelé un **minorant** de la suite u.

On dit que la **suite u** est **bornée**

S'il elle est à la fois **majorée** et **minorée**.

Suite **croissante** et **majorée** est **convergente**

suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**

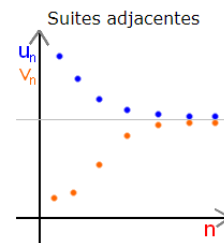
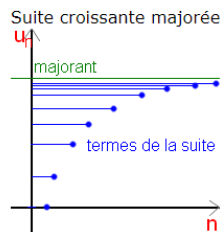
(attention, leur limite n'est pas forcément le majorant ou le minorant).

Suite **croissante** est toujours **minorée** par **son premier terme**.

suite **décroissante** est toujours **majorée** par **son premier terme**.

Suite **monotone** peut être convergente ou divergente

Si deux suites sont **adjacentes**,
alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.



Suites définies par récurrence

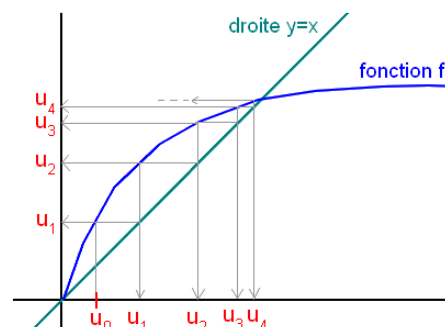
Une **suite définie par récurrence** est une suite

dont on connaît un terme et une relation reliant pour tout n terme u_{n+1} au terme u_n .

Exemple : la suite $\begin{cases} u_0 = 25 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ est définie par récurrence.

Calcul

Appelons f la fonction qui donne u_{n+1} en fonction de u_n .





Mathématiques

Fiches : Les suites

Date :
17/08/2024

Si f est **continue** et que u est **convergente**,

- en appelant l la limite de u
- et en calculant la limite quand n tend vers $+\infty$ des deux membres de la relation de récurrence

SI on obtient l'égalité $l=f(l)$.

Alors cette équation permet généralement de calculer la **valeur de l** .

Puis

On rapporte u_1 sur l'axe des **abscisses** en utilisant la droite d'équation $y=x$: depuis u_1 sur l'axe des **ordonnées**,

On se déplace **horizontalement** vers cette droite puis une fois qu'on la touche, **on descend vers l'axe des abscisses**.

Comme $u_2=f(u_1)$, on peut ensuite avec la courbe de f placer u_2 sur l'axe des **ordonnées**.

Enfin, comme pour u_1 , on rapporte ensuite sa valeur sur l'axe des **abscisses** en utilisant la droite d'équation $y=x$.

On renouvelle ensuite ces étapes afin d'avoir u_3, u_4 , etc. sur l'axe des abscisses.

Au bout d'un moment, on peut deviner si la suite est convergente, et si oui, quelle est sa limite

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement qui permet de démontrer qu'une propriété qui dépend d'un entier naturel n est vraie pour tout n .

Exemple, un raisonnement par récurrence permet de démontrer que 4^n-1 est toujours un multiple de 3.

Méthode

Appeler P_n ="la propriété que l'on veut démontrer". On pose donc P_n ="4n-1 est un multiple de 3".

Montrer que P_0 est vraie. Ici P_0 est vraie, car $4*0-1=0$ et 0 est un multiple de 3.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est encore vraie.

Rédiger : "Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie".

Montrer que P_{n+1} est encore vraie, donc que $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3.

C'est l'étape la plus difficile, mais après quelques calculs, on y arrive.

$$\begin{aligned}4^{n+1}-1 &= 4^n \times 4 - 1 \\&= 4^n(3+1) - 1 \\&= 4^n \times 3 + 4^n \times 1 - 1 \\&= 4^n \times 3 + 4^n - 1\end{aligned}$$

$4^n \times 3$ est bien sûr un multiple de 3.

4^n-1 est un multiple de 3 car P_n est vraie.

La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 donc $4^n \times 3 + 4^n - 1$ est un multiple de 3.

Donc $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3, donc P_{n+1} est vraie.

Donc, comme P_0 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$,

on a $P_0 \Rightarrow P_1$, donc P_1 est vraie, puis $P_1 \Rightarrow P_2$ donc P_2 est vraie, etc.

Donc P_n est vraie $\forall n$.

Rédiger : "**Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n** ".
