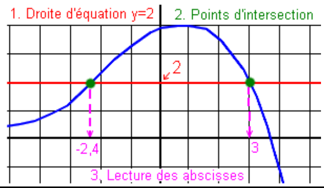
Mathématiques
Etude des fonctions

Date :
26/07/2024

Les fonctions

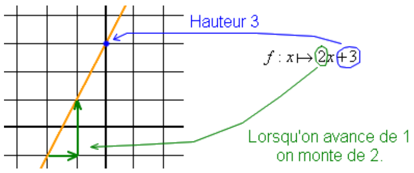
Antécédant
Un antécédent d'un nombre b par une fonction f est un nombre a tel que f(a)=b.
Calcul
L' antécédents de 10 par f(x)=x²+1
On résout l'équation x²+1=10
Les antécédents sont -3 et 3

Ici les antécédents de 2 sont -2,4 et 3



Fonctions linéaires
f :x⟼ ax
a ,le coefficient directeur . Si a>0 alors f est croissante

Fonctions affines
f:x↦ax+b
a ,le coefficient directeur ; Si a>0 alors f est croissante et b, l'ordonnée à l'origine.
Note : En 1point quelconque de la courbe
- Lorsqu'on avance de 1 on monte de 2
- Lorsqu'on avance de 1 on descend de -2



Fonction parabolique
Pour une fonction f(x).
Si f'(x) ↦ $ax^2 + bx + c$ alors étudier le signe de Δ
Si Δ< 0 f' est de signe constant (pas de solution) et
- si f'(0) est > 0 alors f est toujours croissante
- si f'(0) est < 0 alors f est toujours décroissante

Ensemble de définition
L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer f(x).
Comment le déterminer
Si *f* contient une racine carrée
alors l'expression sous la racine doit >0. On étudie l'inéquation
Si *f* contient un quotient
alors le dénominateur doit ≠ 0. On étudie l'équation
Si *f* une racine carrée
Alors

Exemple 1 : Pour $x \longmapsto \sqrt{14 - 7x}$
On résout l'inéquation $14 - 7x \geq 0$
On trouve x ≤ 2
$$D =]-\infty\,;\,2]$$

Exemple 1 : Pour $x \mapsto \frac{3}{2x-8}$
On résout l'équation 2x-8=0
On trouve x=4
$$D =]-\infty\,;\,4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$$

Tableau de variation de la fonction
1 - Ecrire sur la 1er ligne les valeurs de x pour lesquelles le sens de variation change.
2 - En dessous, on symbolise par des flèches les variations de f.
3 - Aux extrémités des flèches, on écrit les valeurs prises par la fonction.

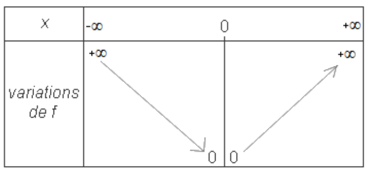


Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Mathématiques
Etude des fonctions

Date : 26/07/2024

Tableau de variation de la fonction suite

1. Calculer sa dérivée.
2. Etudier le signe de la dérivée (en résolvant une inéquation).
3. Dessiner un tableau comme ci-contre :
4. Ecrire sur la 1er ligne les valeurs de x pour lesquelles f'(x) change de signe.
5. Remplir la 2éme ligne avec des + ou des -.
6. Remplir la 3éme ligne avec des flèches qui montent lorsque f'(x)>0 pour les valeurs de x situées sur la première ligne, ou qui descendent lorsque f'(x)<0.

x	
signe de f'(x)	
variations de f	

Exemple $x \longmapsto x(20-2x)(10-2x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$

1. Calculer sa dérivée.

$f'(x) = 12x^2 - 120x + 200$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ $x_2^1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Etudier le signe de f'(x) (en résolvant une inéquation).

$12x^2 - 120x + 200 > 0$

Positif sur $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{3}\sqrt{3}\right] \cup [\frac{5}{3}\sqrt{3}\,;\,+\infty[$

Négatif sur $[5 - \frac{51}{3}\sqrt{3}\,;\,5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}]$

3 Dessiner et remplir le tableau

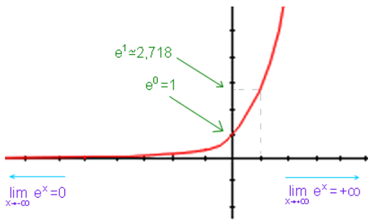
6.

x	$-\infty$	$5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ≈2,11		$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ≈7,89	$+\infty$
Signe de f'(x)	+	0	−	0	+
Variations de f	↗		↘		↗

Fonction exponentielle

La f exponentielle est la f qui à tout nombre x associe e à la puissance x

Comme e>0 **e**=2,718281828, on a toujours $e^x>0$ ou exp(x) >0).



Propriétés (des puissances)	Limites
$e^0 = 1$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$e^{a+b} = e^a * e^b$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$(e^a)^n = e^{a*n}$	

Dérivée : Si f(x) = e^x alors f'(x) = e^x

[f(x)=$x^2 * e^x$ f'(x)=$2e^x + x^2e^x$ (u'v + uv')]

Dérivée de e^u : u fonction dérivable

$(e^u)' = u'{*}e^u$

Comme elle ne prend qu'une fois chaque valeur de $\mathbb{R}^+$,

si $e^a = e^b$ alors a=b (pratique pour résoudre certaines équations). →

Exemple : $e^{3x+1} = 1$ ou $e^{3x+1} = e^0$

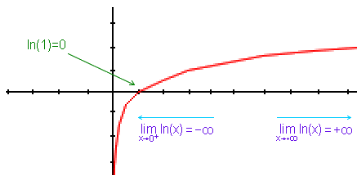
Cela implique que 3x+6=0

Donc x=2

Note : Si on doit répondre combien de solution à l'équation Alors étudier jusqu'au bout le signe de Δ et ses solutions qui doivent être uniquement >0

Fonction log népérien

La f log est la f qui à tout nombre a, $ln(e^a) = a$ et ∀ a>0, $e^{ln(a)} = a$



Propriétés	Limites
ln(1) = 0 car e^0=1.	$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
$ln(a*b) = ln(a) + ln(b)$	$\lim_{x\to\infty} xln(x) = 0$
$ln\,\frac{a}{b} = ln(a) - ln(b)$	
$ln(a^n) = nln(a)$	

Dérivée : Si f(x) = ln(x) alors f'(x) = $\frac{1}{x}$

Dérivée de :

Mathématiques
Etude des fonctions

Date : 26/07/2024

Fonction composée

La dérivée d'une fonction composée de la forme est .

$$h = f°g \; est \; h' = f'°g * g'$$

Conséquences :

u(x)	**u'(x)**
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	nu'u^{n-1}
e^n	u'e^u
ln(u)	$\frac{u'}{u}$

Exemple : Dérivée de $h(x) = \sqrt{5x^2+3}$

On pose f(x)=$\sqrt{x}$ et g(x)=$5x^2$+3

f'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et g'(x)=10x

h'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$*10x=$\frac{5x}{2\sqrt{x}}$

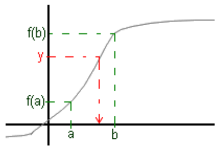
Exemple :

Théorème des valeurs intermédiaires

Fonction continue

f est **continue** sur I *si* ∀ si x parcourant I, on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.

Cela revient à dire que pour tout nombre a de cet $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



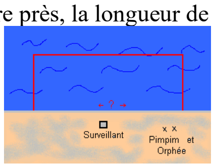
Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue sur un I [a,b], alors ∀ y de I $[f(a); f(b)]$ l'équation f(x)=y admet au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

Enoncé particulier sur une problématique

Paul et Virginie sont sur la plage. Le surveillant veut délimiter une zone de baignade de 500m² avec des bouées et une corde rouge. La corde doit être la plus petite possible.

Quelle sera à 0,1 mètre près, la longueur de la zone délimitée?



Appelons x la longueur du rectangle obtenu et y sa largeur.

On a x*y = 500.

On en déduit l'expression de la fonction qui donne la longueur de corde rouge :

$$f(x) = x + 2y = x + 2\frac{500}{x} = x + \frac{1000}{x}$$

On veut que cette longueur soit minimale, étudions donc cette fonction. La dérivée vaut

$$f'(x) = 1 - \frac{1000}{x^2}$$

Etudions le signe de cette dérivée.

$f'(x) > 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1000}{x^2} > 0$

$\Rightarrow x^2 - 1000 > 0$

$\Rightarrow x^2 > 1000$

$x_1 < -\sqrt{1000}$ ou $x_2 < +\sqrt{1000}$

$\sqrt{1000}$ ~ 31,6donc sur l'intervalle [0 ; +∞[la fonction f est décroissante jusqu'à x=31,6 et croissante après.

x=31,6 est donc un minimum de f et donc la corde rouge possède une longueur minimale lorsque la longueur du rectangle est 31,6 mètres.

Comme x * y = 500 et x=31,6, y=500÷31,6 ≈ 15,8.

Finalement x+2y=31,6+2×15,8=63,2.

La longueur minimale de la corde rouge à utiliser est 63,2 mètres.