Mathématiques
Primitives et intégrales

Date : 26/07/2024

Les primitives [TA]

La **primitive** d'une fonction f est une fonction F qui a pour dérivée f. Les primitives servent à calculer des intégrales (chapitre suivant).

Primitive d'une fonction
La **primitive** d'une fonction f est une fonction F qui a pour dérivée f.

Exemples :
f→ $3x^2$a pour primitive $F \to x^3$
f→ $\frac{1}{x^2}$a pour primitive $F \to \frac{1}{x}$

Primitive somme et produit

La primitive d'une **somme** de f	la somme des primitives de ces f
La primitive du **produit** d'un nombre par une f	le produit de ce nombre par la primitive de f.

Exemples :
f→ $2x + 3$ a pour primitive $F \to x^2 + 3x$
f→ $5cos(x)$ a pour primitive $F \to 5sin(x)$

Primitive d'une fonction puissance
C = n'importe quel nombre.

$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

Exemples :

$$f(x) = x^7 \ alors\ F(x) = \frac{1}{8}x^8$$

$$f(x) = 3x^4 \ alors\ F(x) = \frac{3}{5}x^5 \ + \ 6$$

Primitive d'un quotient

f($\frac{u'}{u}$)	ln(|u|)

Exemples :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ alors\ F(x) = ln(x^2+1)$$

Méthode
1. Chercher à repérer la forme u'/u.
2. Transformer l'écriture de la fonction en faisant apparaître la forme u'/u.
3. Appliquer la formule.

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2}{x^3+3}$
On pose u(x)=$x^3 + 3$ comme u'(x)=$3x^2$
f(x)=2*$\frac{x^2}{x^3+3} = 2 * \frac{3}{3} * \frac{x^2}{x^3+3} = \frac{2}{3} * \frac{3x^2}{x^3+3}$
F(x)=$\frac{2}{3}ln(|x^3 + 3|) + C$

Primitive avec composée de fonctions
La difficulté consiste à reconnaître la présence de l'une de ces formules
puis de transformer l'écriture de la fonction pour faire apparaître une fonction u et sa dérivée u'.

f(x)	**F(x), la primitive**
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$nu'u^{n-1}$	u^n
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	ln(u)
F'°$g * g'$	f°g

Exemple : Primitive de $f(x) = x(x^2+3)^4$
On reconnait la forme u^n
Il faut u^n et u' pour faire apparaitre $nu'u^{n-1}$
Posons u(x)=$(x^2 + 3)$ alors u'(x)=2x
On modifie l'écriture de f pour faire apparaitre 2x

$$f(x) = \frac{1}{2} * 2x(x^2+3)^4 = \frac{1}{2}u'u^4$$

Mathématiques
Primitives et intégrales

Date : 26/07/2024

Tableaux des primitives

Primitives de fonctions usuelles

Fonction définie sur I	Primitives de f sur I	Intervalle I
a (constante)	$ax + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^n $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}x^2 + C$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lVert x \rVert + C$ $\ln x + C$	$\mathbb{R} - \{0\}$ $]0; +\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$	$]0; +\infty[$

Primitives et opérations sur les fonctions

Fonction définie sur I	Primitives de sur I (C constante réelle)	Condition(s)
$u' + v'$	$ax + C$	$\mathbb{R}$
$\lambda u'$	$\lambda u + C$	λ réel
$u'v + uv'$	$uv + C$	
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + C$	Pour tout x dans I, $v(x) \neq 0$
$(u' \circ v)v'$	$(u \circ v) + C$	Pour tout x dans I, $v(x) \neq 0$
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	Lorsque que $n < -1$ pour tout x dans I, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	Pour tout x dans I, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	Pour tout x dans I, $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lVert u \rVert + C$ soit $\ln u + C$ $\ln(-u) + C$	Pour tout x dans I, $u(x) > 0$ Pour tout x dans I, $u(x) < 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	
$x \to u(ax + b)$	$\frac{1}{a}U(ax + b) + C$	U primitive de u sur I

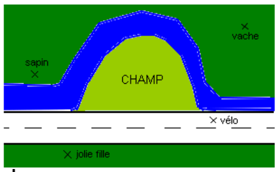
Le C montre qu'il existe une infinité de primitive car en dérivant la primitive on retrouve toujours la même dérivée

Mathématiques
Primitives et intégrales

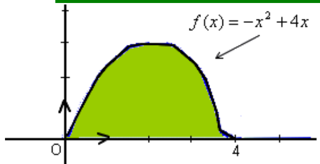
Date :
26/07/2024

Les intégrales [TA]

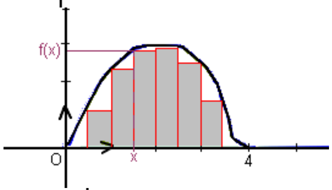
Aspect théorique et notations
Les **intégrales** ont été inventées pour calculer les aires de figures non usuelles.
Si nous parvenons à calculer des intégrales de fonctions, nous pourrons donc calculer des aires exactes de figures délimitées par des courbes.



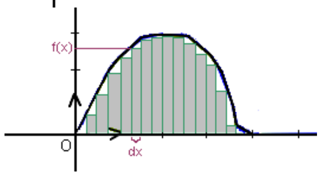
À l'aide de relevés de positions sur le terrain et de techniques de calcul, il est possible de trouver une fonction dont la représentation graphique suit le cours de la rivière, après avoir placé le tout dans un repère.



On peut approcher l'aire sous la courbe en calculant la somme des aires de rectangles placés en dessous.



Plus il y a de rectangles, de petite largeur, plus l'approximation est bonne.



En notant *dx* une longueur infiniment petite sur l'axe des abscisses, l'aire sous la courbe est **la somme des aires d'une infinité de rectangles de longueurs *dx* et de hauteurs f(x)** à chaque fois, pour x variant de 0 à 4.
On note cette somme $\int_0^4 f(x)dx$, ce qui se lit : "**intégrale de f entre 0 et 4**".

Calcul d'une intégrale
En notant F une primitive de f on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

OU

Intégration par partie

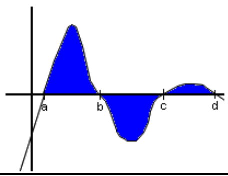
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'x()dx$$

Exemple :
$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx \;= \left[\frac{-1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4$
$= (\frac{-1}{3} * 4^3 + 2 * 4^2) - 0$
$= \frac{32}{3} \sim 10{,}67$

Exemple :
$\int_0^\pi xcos(x)dx = [xsinx]_0^\pi$-$\int_0^\pi sin(x)\, dx$
$= \pi sinx - 0sin0 - [-cosx]_0^\pi$
$= cos\pi - cos0$ = -1-1=-2

Intégrale d'une fonction négative

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$



Annexes sur les intégrales

Mathématiques
Primitives et intégrales

Date :
26/07/2024

Tableau des intégrales

$\int_a^a f(x)dx$	0	
$\int_b^a f(x)dx$	$-\int_a^{ab} f(x)dx$	
$\int_b^a f(x)dx$	$\int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	
$\int_a^b kf(x)dx$	$k\int_a^b f(x)dx$	Pour k $\in$ $\mathbb{R}$
$\int_a^b (f(x)+g(x))dx$	$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	
Si f(x) $\geq$ 0	Alors $\int_b^a f(x)dx \geq 0$	
Si f(x) $\geq$ g(x)	Alors $\int_b^a f(x)dx \geq \int_b^a g(x)dx$	

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] avec a $\neq b$
On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$