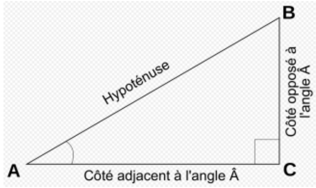
# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date :
17/08/2024

*Géométrie 5*

## Droites particulières

Dans un triangle, la somme des angles fait toujours 180°
La somme de deux angles complémentaires = 90°
La somme de deux angles supplémentaires = 180°
Dans un triangle rectangle

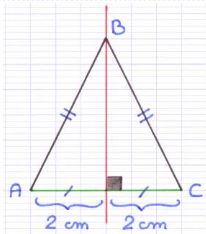



Dans un triangle **isocèle** (2 coté de même longueur) et angles adjacents à la base égaux.

$p = 2a + b$

$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

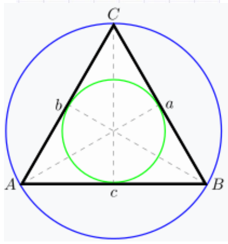
Si l'angle en A d'un triangle isocèle vaut 300 Alors l'angle B ou C vaut 75°



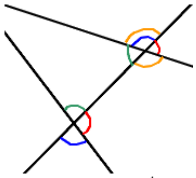

Dans un triangle **équilatéral** (3 côtés de même longueur) tous les angles sont égaux 60°.

$p = 3a$

$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

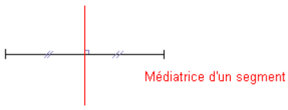



Angles opposés par le sommet ORANGE
Angles correspondants ROUGE
Angles alternes – externes BLEU

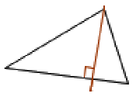


La **bissectrice d'un angle** est la demi-droite qui divise cet angle en **deux angles égaux.**

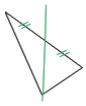

La **médiatrice d'un segment** est la droite qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son **milieu**.




Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par **un sommet du triangle** et qui coupe son côté opposé en formant un **angle droit**.



Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un **sommet** et qui coupe le côté opposé en son **milieu**.



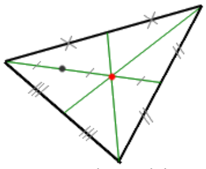
# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date :
17/08/2024

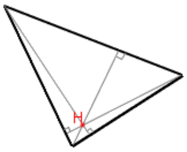
## Points particuliers d'un triangle

Dans un triangle sont **concourantes**,
- les 3 bissectrices issues des angles se coupent toujours en un même point
- les 3 hauteurs, les 3 médianes, et les 3 médiatrices d'un triangle

- Le **point d'intersection des médianes** s'appelle le **centre de gravité** du triangle.
  Il est situé exactement **aux 2 tiers des médianes** lorsque l'on part des sommets.
- Le **point d'intersection des hauteurs** s'appelle l'**orthocentre** du triangle.
- Le **point d'intersection des médiatrices** n'a pas de nom, mais c'est sur ce point qu'on doit placer la pointe d'un compas pour tracer le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle, appelé **cercle circonscrit** au triangle.
- Enfin, le **point d'intersection des bissectrices** n'a pas de nom non plus, mais il permet de construire le plus grand cercle qu'on peut placer à l'intérieur du triangle, appelé le **cercle inscrit**.

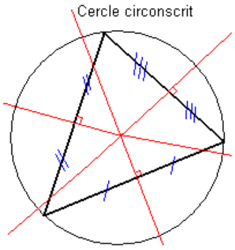



centre de gravité
(en rouge)

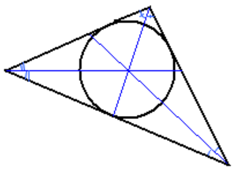



orthocentre H

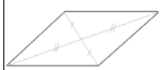
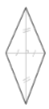
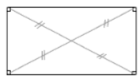
Cercle circonscrit



Cercle inscrit



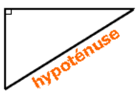
## Propriétés des quadrilatères

| Nom | Côtés | Diagonales | Figure |
|---|---|---|---|
| Parallélogramme | Côtés opposés parallèles et de même longueur | Les diagonales se coupent en leur milieu. |  |
| Losange | Côtés de même longueur, côtés opposés parallèles | Les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. |  |
| Rectangle | Côtés opposés parallèles et de même longueur | Les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur. |  |
| Carré | Côtés de même longueur, côtés opposés parallèles | Les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur. |  |

*Géométrie 4*

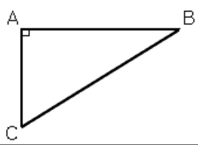
## Théorème de Pythagore

**Vocabulaire**
Le plus grand côté d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse**




**Théorème de Pythagore**
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés

Dans le triangle ABC rectangle en A, $BC^2=AB^2+AC^2$.



# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date : 17/08/2024

## Utiliser le théorème de Pythagore

Pour utiliser le théorème de Pythagore, on doit connaître les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

**Méthode**

1 - Ecrire l'égalité. Par exemple $AB^2+AC^2=BC^2$.
2 - Remplacer les côtés connus par leur longueur. Par exemple, $4^2+AC^2=7^2$.
3 - Calculer les carrés de ces nombres. Exemple : $16+AC^2=49$.
4.- Utiliser les règles sur les équations. Exemple : $AC^2=49-16$.
5.- Calculer l'autre côté. On obtient $AC^2=33$.
6 - Calculer la racine carrée du résultat obtenu. AC mesure environ 5,74 cm.

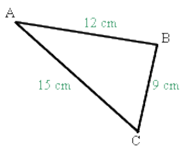
**Remarque** : Le théorème de Pythagore est particulièrement utile pour calculer des longueurs qu'on ne peut pas mesurer, comme des grandes distances sur la Terre ou dans l'espace (astronomie).

## Réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

Méthode et exemple :

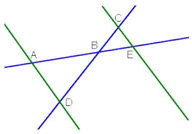


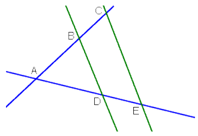

Question : le triangle ABC ci-contre est-il rectangle ?
Méthode : On calcule séparément $AC^2$ et $AB^2+BC^2$ et on compare les résultats obtenus.
On conclut.
$AC^2=15^2=225$
$AB^2+BC^2=12^2+9^2=144+81=225$.
On a bien $AB^2+BC^2=AC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

*Géométrie 3*

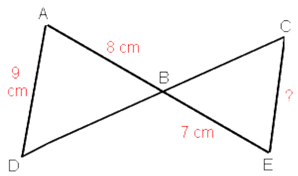
## Pour utiliser le théorème de Thales

On doit être en présence de deux droites parallèles (vert) coupées par deux droites sécantes (bleu).

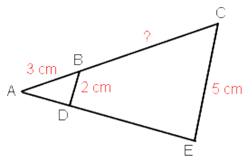



On doit connaître au moins trois longueurs dans ce type de figure.

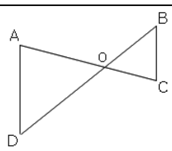



On pourra calculer CE.




On pourra calculer AC et en déduire BC.

## Théorème de Thales

| | |
|---|---|
| **Si** A, O, B, C, D sont cinq points tels que:<br>- (AD) et (BC) sont parallèles.<br>- (AC) et (DB) se coupent en O.<br>Alors . $\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}=\frac{AD}{BC}$ |   |
| OD < OB et OA<OC et pour les parallèles AD <BC | Calcul d'une proportion :<br>$\frac{AB}{5}=\frac{7}{9}=0{,}78\ donc\ AB=5*0{,}78$<br>$\frac{5}{AB}=\frac{7}{9}=0{,}78\ donc\ AB=5\div 0{,}78$ |

## Comment utiliser le théorème de Thales

# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

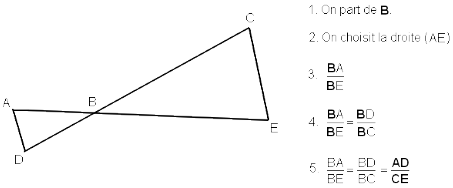
Date :
17/08/2024

**Méthode**
1. Enoncer le théorème et on écrit les rapports égaux.
2. Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs numériques et on raye le rapport inutile.
3. Réaliser un produit en croix.

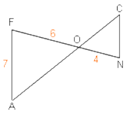
**Pour écrire les rapports égaux :**
1. Repérer le point d'intersection des deux droites non-parallèles.
2. Choisir l'une des deux droites qui passe par ce point.
3. Rester sur cette droite et en partant toujours de ce point et écrire le rapport de la plus petite longueur par la plus grande.
4. Faire de même sur l'autre droite qui passe par ce point.
5. Ecrire le rapport de la plus petite longueur par la plus grande sur les deux droites parallèles.

Remarque : On peut aussi écrire les rapports des grandes longueurs par les petites, mais dans ce cas, il faut bien le faire pour les trois rapports.

**Écriture des rapports**




Utilisation du théorème

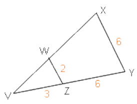



On sait que (FA) et (CN) sont parallèles.
Calculer CN.

D'après le théorème de Thalès :
$\frac{oc}{oa} = \frac{on}{of} = \frac{cn}{fa}$ Puis $\frac{oc}{oa} = \frac{4}{6} = \frac{cn}{7}$
Alors $cn = (7 * 4) \div 7 \sim 4{,}7cm$

### Comment utiliser Réciprocité du théorème de Thales

La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles (ou qu'elles ne le sont pas).
Exemple




Pour démontrer que les droites ci-dessus (XY) et (WZ) sont parallèles, on calcule séparément les rapports $\frac{vz}{vy}$ $et$ $\frac{wz}{xy}$ et on montre qu'ils sont égaux.

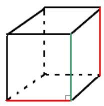
$\frac{vz}{vy} = \frac{3}{3+6} = \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$ et $\frac{vz}{xy} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{vz}{vy} = \frac{wz}{xy}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (XY) et (WZ) sont parallèles.

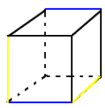
Géométrie 2

### Droites de l'espace

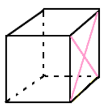
Dans l'espace, deux droites peuvent être :
- parallèles.
- sécantes si elles se coupent en un point.
- ni parallèles ni sécantes (à la différence des droites d'un plan qui sont toujours soit parallèles soit sécantes).
- perpendiculaires (et donc sécantes) si elles se coupent en formant un angle droit.
- **orthogonales** s'il existe une parallèle à la première qui est perpendiculaire à la deuxième.



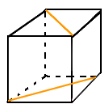
Les droites rouges sont orthogonales.



Les droites bleues sont parallèles.
Les droites jaunes sont orthogonales.



Les droites roses sont sécantes et perpendiculaires.



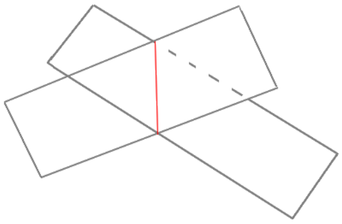
Les droites oranges ne sont ni parallèles ni sécantes.

### Plan dans l'espace

# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date :
17/08/2024

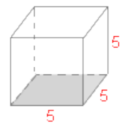
Deux plans de l'espace peuvent être :
- Parallèles et distincts.
- Parallèles et confondus.
- Non parallèles. Dans ce cas, ils sont . Leur intersection est une droite.



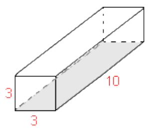
Les deux plans ci-dessus sont sécants.
Leur intersection est une droite.

## Les solides

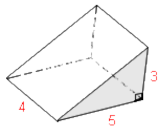
**Volume d'un cube, d'un pavé et d'un prisme**
Pour calculer le volume d'un cube, d'un pavé ou d'un prisme, il faut multiplier l'aire de sa base par sa hauteur.




$V = \underbrace{5\times5}_{B}\times\underbrace{5}_{h} = 125\ cm^3$

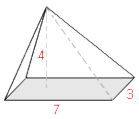



$V = \underbrace{3\times10}_{B}\times\underbrace{3}_{h} = 90\ cm^3$

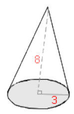



$V = B\times h = \frac{5\times3}{2}\times4 = 30\ cm^3$

**Volume d'un cône et d'une pyramide**
Pour calculer le volume d'un cône ou d'une pyramide, on multiplie l'aire de sa base par sa hauteur, puis on divise le résultat obtenu par 3.




$V = \frac{7\times3\times4}{3} = 28\ cm^3$

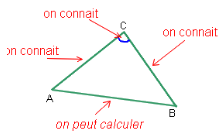



$V = \frac{\pi\times3^2\times8}{3} = 24\pi \approx 75\ cm^3$

*Géométrie 1*

## Le théorème d'Al-Kachi

Le théorème d'Al-Kachi permet de calculer des longueurs dans un triangle quelconque lorsqu'on connaît la mesure d'un angle et les longueurs des côtés adjacents à cet angle.
Le théorème d'Al-Kachi est plus puissant que le théorème de Pythagore, car il ne nécessite pas la présence d'un angle droit !




**Théorème**
Dans un triangle ABC, on a toujours : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - (2AC)(BC)(\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}))$

**Démonstration**
Remarquons d'abord que pour tout vecteur $\vec{u}$, comme

$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| * \|\vec{u}\| * \cos 0\ on\ a\ \vec{u}^2 = \|\vec{u}^2\|$

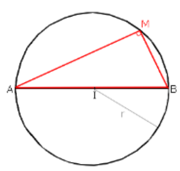
Dans un triangle ABC quelconque, on a donc :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \overrightarrow{AB}^2 \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2 && \longleftarrow \text{On décompose } \overrightarrow{AB} \text{ en utilisant la relation de Chasles.} \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) && \longleftarrow \text{On applique le carré.} \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} && \longleftarrow \text{On développe avec la double distributivité.} \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2+2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\|\overrightarrow{CB}\|^2 && \longleftarrow \text{On réduit.} \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-2\times\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} && \longleftarrow \text{Car } \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}. \\
\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-2\times\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) && \longleftarrow \text{On applique la formule du produit scalaire.}
\end{aligned}$$

D'où la formule du théorème.

## Le cercle et le triangle rectangle

**Propriété**
Tout triangle formé par deux points du diamètre d'un cercle et un autre point sur le cercle est rectangle.
Autrement dit, un cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que (MA)⊥(MB).



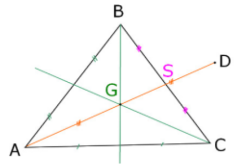
# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date :
17/08/2024

**Démonstration**
Nous savons qu'un cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M tels que IM=r.
Prenons A et B deux points aux extrémités d'un diamètre de ce cercle : comme le centre du cercle est au milieu du diamètre, le cercle est l'ensemble des points M tels que IM=IA.
IM=IA est équivalent à $IM^2=IA^2$, car des longueurs sont toujours positives, et donc à $MI^2-IA^2=0$, et donc à $\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=0$, et donc aussi à $(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=0$, avec la troisième identité remarquable.
Comme I est le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.
IM=IA est donc équivalent à $(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0$ et donc à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ en utilisant la relation de Chasles.
Le cercle est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.
C'est donc l'ensemble des points M tels que (MA)⊥(MB).

## Les médianes d'un triangle sont concourantes

**Propriété**
Les médianes d'un triangle se coupent toutes au même point et ce point est situé aux deux tiers des médianes en partant des sommets.



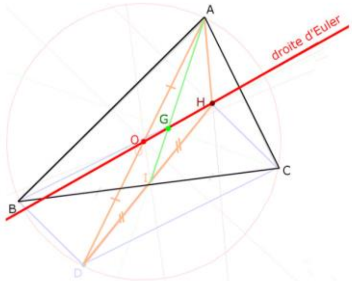

**Démonstration**

## La droite d'Euler

**Propriété**
Dans un triangle ABC quelconque :

- le centre O du cercle circonscrit
- le centre de gravité G
- l'orthocentre H

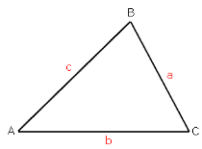
sont toujours alignés.




**Démonstration**

## La loi des sinus

**Propriété**
Dans un triangle ABC quelconque,
**Si** a=BC, b=AC et c=AB,
Alors . $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin b}{b} = \frac{\sin c}{c}$




**Démonstration**

Appelons h la longueur de la hauteur issue de A. Nous avons $\sin(\hat{C})=\frac{h}{b}$ et $\sin(\hat{B})=\frac{h}{c}$

Donc $h=b\sin(\hat{C})$ et $h=c\sin(\hat{B})$

Donc $b\sin(\hat{C})=c\sin(\hat{B})$.

Donc $\frac{\sin(\hat{C})}{c}=\frac{\sin(\hat{B})}{b}$.

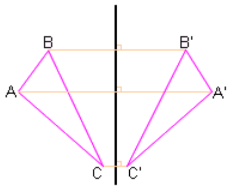
En utilisant l'une des deux autres hauteurs du triangle ABC, on peut obtenir une égalité similaire, ce qui nous prouve la double égalité.

## Les transformations du plan

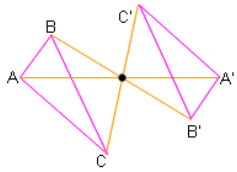
# Mathématiques
# Fiches : Géométrie

Date :
17/08/2024

La symétrie axiale

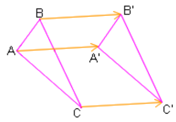



La symétrie centrale



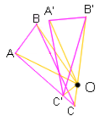

Effectuer une **translation** de vecteur $\vec{u}$ consiste à déplacer tous les points d'un plan en suivant la direction, le sens et la longueur de $\vec{u}$.

La translation



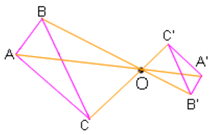

Effectuer une **rotation** de centre O et d'angle orienté α consiste à faire tourner tous les points autour de O avec un angle orienté α. On a OA'=OA et $(\vec{OA},\vec{OA'}) = \alpha$.

La rotation




L'image d'un point A par une **homothétie** de centre O et de rapport k est le point A' tel que $\vec{OA'} = k\vec{OA}$ (pour cette figure, k=0,5)

L'homothétie

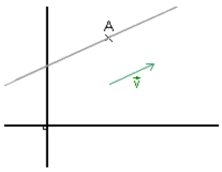



**Propriétés**
La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation conservent les longueurs.
Par contre, une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par |k|, les aires par k² et les volumes par |k|3.
Exemple, si l'aire d'un triangle = 100 cm², l'aire de l'image de ce triangle par une homothétie de rapport 3 = 900 cm².

*Géométrie TS*

## Équation d'une droite de l'espace

La notion de colinéarité de vecteurs se généralise dans l'espace : deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que l'un soit égal à k fois l'autre.
Pour déterminer l'équation d'une droite (d) de l'espace de vecteur directeur $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$ et passant par un point A(xA;yA;zA), on écrit que (d) est l'ensemble des points M(x;y;z) tels que $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_a \\ y - y_a \\ z - z_a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_y \\ y_y \\ z_y \end{pmatrix}$ soient colinéaires.




Comme $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{v}$.
Donc :

$$\begin{cases} x - x_A = k \times x_v \\ y - y_A = k \times y_v \\ z - z_A = k \times z_v \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = x_A + k.x_v \\ y = y_A + k.y_v \\ z = z_A + k.z_v \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé **équation paramétrique** de (d).

## Équation d'un plan dans l'espace

La notion d'orthogonalité de vecteurs se généralise aussi dans l'espace : deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
Il est possible de calculer l'équation d'un plan de l'espace lorsqu'on connaît un point du plan et un vecteur normal à ce plan.
Appelons A le point connu et $\vec{u}(a,b,c)$ le vecteur normal.



Le plan est l'ensemble des points M(x;y;z) tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
Comme ils sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul.

$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

Donc si un point M(x;y;z) appartient à un plan P de vecteur normal $\vec{u}(a,b,c)$, il existe un nombre d tel que ax+by+cz+d=0.
Cette égalité est l'équation cartésienne de (P).
Inversement, à partir de l'équation cartésienne d'un plan, il est toujours possible de donner les coordonnées d'un vecteur normal : ce sont les coefficients devant x, y et z.