Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date :
26/07/2024

[Trigonométrie 4](#)

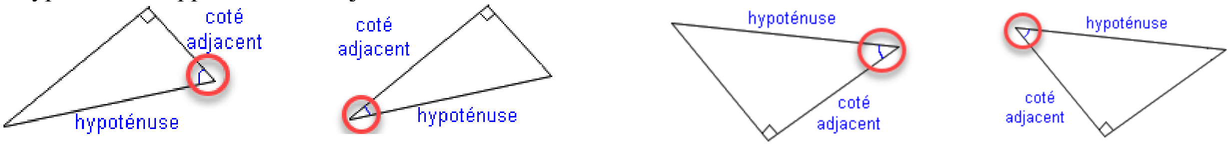
Radians → Dégré | **Mesure principale** |**Combien fait sin$\frac{7\pi}{6}$** |**Relations trigo** |**Equations** |

Notations

La trigonométrie est la partie des mathématiques qui fait le lien entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et les mesures de ses angles.

Le côté adjacent

Dans un triangle rectangle, pour un angle donné, le côté qui touche cet angle, mais qui n'est pas l'hypoténuse s'appelle le côté adjacent.



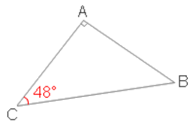
Formule du cosinus

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle est le nombre égal à la longueur du côté adjacent divisée par la longueur de l'hypoténuse.

$$cosinus\ (angle) = \frac{L\ du\ coté\ adjacent}{L\ de\ hypoténuse}$$

Exemple :

$$\cos 48^o = \frac{AC}{BC}$$

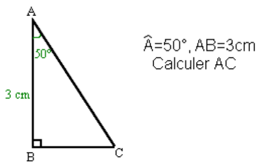


Utilisation du cosinus

Méthode

1. Ecrire la formule.
2. Remplacer les valeurs connues par les données de l'énoncé.

Si on doit calculer une **longueur**
3. Ecrire le cosinus sous la forme d'une fraction sur 1.
4. Réaliser un produit en croix.



1 $\cos(\widehat{A}) = \frac{AB}{AC}$

2. $\cos(50) = \frac{3}{AC}$

3. $\frac{\cos(50)}{1} = \frac{3}{AC}$

4. $\frac{\cos(50)}{1} \times \frac{3}{AC}$

$AC = \frac{1 \times 3}{\cos(50)}$

Cos(50)=0,64
donc $AC \approx 4{,}7$cm.

Si on doit calculer **l'angle**
3. Appliquer la fonction réciproque du cosinus au résultat obtenu.
Cos(40°)=0,77 ⇔ $\cos^{-1} 0{,}77 = 40°$

Attention !
• La notation -1 après le cos est une simple notation et n'a rien à voir avec les puissances.
• Afin d'éviter une erreur de précision dans le résultat, il est préférable de calculer cos-1(2÷3) en une seule étape sur la calculatrice plutôt que de calculer le cos-1 d'un arrondi de 2÷3.
La somme des angles d'un triangle rectangle est de 180

[Trigonométrie 3](#)

Cosinus, sinus et tangente

$$\frac{SO\ CA\ TO}{H\ \ H\ \ A}$$

On peut alors écrire les trois formules de trigonométrie :

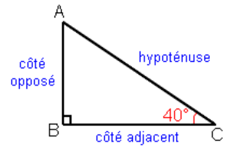
$$Sinus = \frac{Opposé}{Hypoténuse} \qquad Cosinus = \frac{Adjacent}{Hypoténuse} \qquad Tangente = \frac{Opposé}{Adjacent}$$

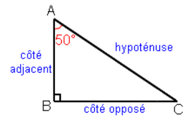
Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date : 26/07/2024

Utilisation des formules

Côté adjacent, côté opposé et hypoténuse





• **L'hypoténuse** est le plus grand côté d'un triangle rectangle.
• **Le côté adjacent** à un angle est le côté qui touche cet angle mais qui n'est pas l'hypoténuse.
• **Le côté opposé** à un angle est le côté qui ne touche pas cet angle.

Choix de la formule
En fonction des données connues dans le triangle et de la donnée recherchée, il faut choisir l'une des 3 formules.

$$\frac{SO}{H}\ \frac{CA}{H}\ \frac{TO}{A}$$

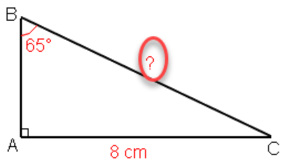
Exemple :

On connaît un angle et la longueur du côté adjacent.
On doit trouver la longueur du côté opposé.

On choisit la formule dans laquelle il y a le côté adjacent et le côté opposé.

Méthode

1. Choisir la formule.
2. Ecrire avec les lettres du triangle.
3. Remplacer les lettres (côtés et angles) par les données connues.
4. Ecrire le cosinus, le sinus ou la tangente sous la forme d'une fraction sur 1 (sauf si on doit calculer un angle, on utilise les touches $\sin^{-1} x$ $\cos^{-1} x$ $\tan^{-1} x$de la calculatrice).
5. Réaliser un produit en croix (sauf si on calcule un angle).



1 On connait l'angle B et le côté opposé.
2 Rechercher la longueur de l'hypoténuse.

On utilise donc la formule du sinus SO/H.

1. $\sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC}$
2. $\sin(65) = \frac{8}{BC}$
3. $\frac{\sin(65)}{1} = \frac{8}{BC}$
4. BC=1×8÷sin(65)

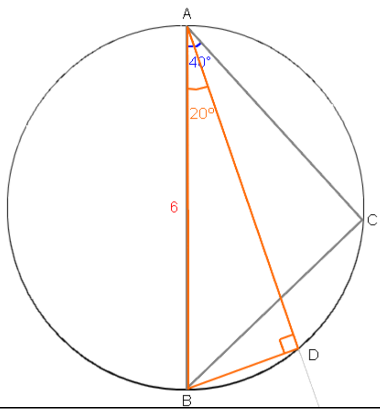
5 donc BC≈8,8cm.

Notes importantes :

❶ Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour plus grand côté le diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.
Le triangle ADB est donc rectangle en D. Nous pouvons utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

❷ Bien appliquer la règle des arrondis

◦



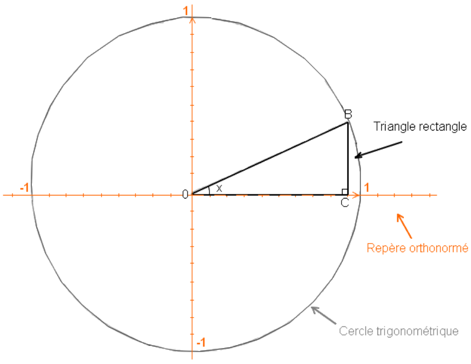
Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date :
26/07/2024

Trigonométrie 2

Le cercle trigonométrique

Considérons un **triangle rectangle** placé dans un **cercle de rayon 1** dont le centre est à l'origine d'un repère orthonormé.
Un tel cercle s'appelle un **cercle trigonométrique**.
A chaque valeur de de **l'angle x** correspond une **longueur** OC.
Il existe donc une ***f*** qui ∀ **angle x** associe **l'abscisse** du point C. Cette fonction est **la fonction cosinus.**
Si C à droite de O, alors cosinus(x) est la longueur OC.



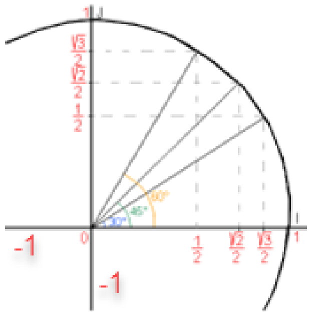
Le **sinus de x** est **l'ordonnée du point B**.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OCB rectangle en C, on a la formule : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

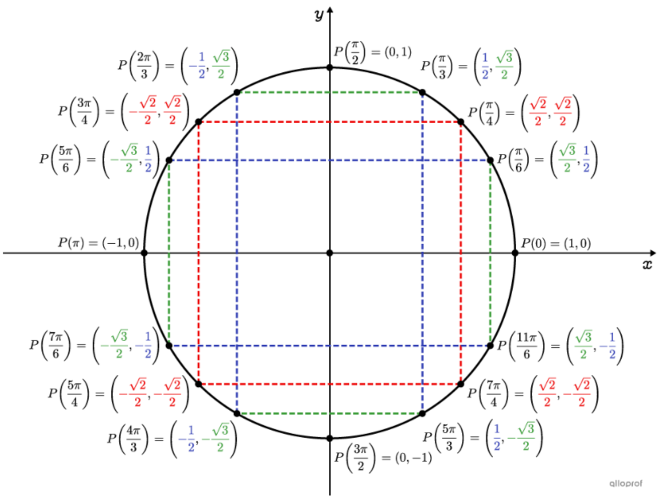
La **tangente** d'un angle est **le quotient de son sinus par son cosinus** : $\text{tang}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

Valeurs remarquables

Les valeurs ci-dessous sont à apprendre et seront utiles pour la suite. On peut s'aider du dessin pour les mémoriser.

Degrés	Radians	$x = \cos\theta$	$y = \cos\theta$
0	0	1	0
30	$\pi \div 6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45	$\pi \div 4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\pi \div 3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\pi \div 2$	0	1
120	$2\pi \div 3$	$-\frac{1}{2}$	
135	$3\pi \div 4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
150	$5\pi \div 6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
180	π	-1	0
210	$7\pi \div 6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
225	$5\pi \div 4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
240	$4\pi \div 3$	$-\frac{1}{2}$	
270	$3\pi \div 2$	0	-1
300	$5\pi \div 3$	$\frac{1}{2}$	
315	$7\pi \div 4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
330	$11\pi \div 6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
360	2π	1	0





Axe des y → *Sin* Axe des x → *Cos*
Ne pas oublier angle A-Angle B = 180°

Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date :
26/07/2024

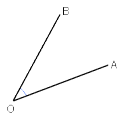
Les fonctions trigonométriques

Les angles orientés

- Un **angle orienté** est un angle formé par un point d'origine et deux vecteurs partant de ce point, mesuré en **radians**
- Il tourne **dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique)**
- Ils peuvent être >0 ou <0.

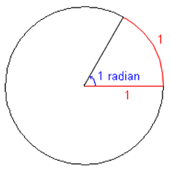
Angle géométrique : $\widehat{O} = \widehat{AOB} = \widehat{BOA}$

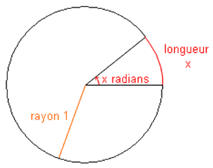
Angles orientés : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) > 0$ $\quad (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) < 0$ $\quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$



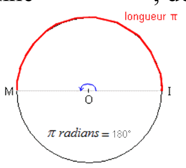
Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Le **radian** est une unité de mesure d'angle.
Prenons un **cercle** de **rayon 1** et plaçons sur son contour un bout de **ficelle de longueur 1.**
Un **radian** est la mesure de l'angle formé par le centre du cercle et les 2 extrémités de la ficelle.

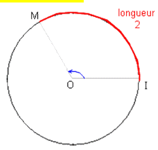




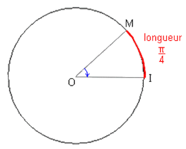
Exemple :
Un angle qui mesure x radians est obtenu avec un morceau de ficelle de longueur x.
Par conséquent, si nous réalisons un tour complet du cercle (360 degrés), la formule du périmètre du cercle donne $P = 2 \times \pi \times 1$, donc $P = 2\pi$. Donc $360° = 2\pi$ *radians*.



$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \pi$ *radians*



$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = 2$ *radians*



$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{4}$ *radian*

Convertir radians en degrés : $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} * 180 \div \pi = \frac{3\pi*180}{4*\pi} = \frac{3*180}{4} = 135°$ Home

Remarque : Impossible de convertir dans le sens degré → radian, car les degrés ne précise pas de sens !

La mesure principale

La mesure principale d'un angle orienté est . $\pi < x \leq \pi$ .Ajouter ou en enlever autant de fois 2π que nécessaire.

Une méthode pour calculer la mesure principale : exemple $\frac{85\pi}{3}$

$-\pi < \frac{85\pi}{3} + k * 2\pi \leq +\pi$	Ecrire la double inéquation correspondant au problème
$-\pi - \frac{85\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{85\pi}{3}$	Chercher à isoler k pour savoir combien de tour à enlever ou à ajouter
$\frac{-3\pi - 85\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{3\pi - 85\pi}{3}$	Simplifier après avoir ôter $\frac{85\pi}{3}$ aux termes de l'inéquations Dénominateur commun = 3
$\frac{-3 - 85}{6} < k \leq \frac{3 - 85}{6}$	Diviser les termes de l'inéquation par 2π Multiplier D par 2π
$-14{,}6 < k \leq -13{,}6 \Rightarrow k = 14$	K est un entier
$\frac{85\pi}{3} - 14 * 2\pi$ soit $\frac{\pi}{3}$	La mesure principale est Réduire au dénominateur commun = 3

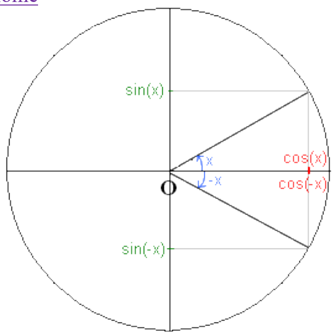
$-\pi - \alpha < k * 2\pi \leq +\pi - \alpha$ avec $\alpha = \frac{85\pi}{3}$ Home

Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date :
26/07/2024

Relations trigonométriques

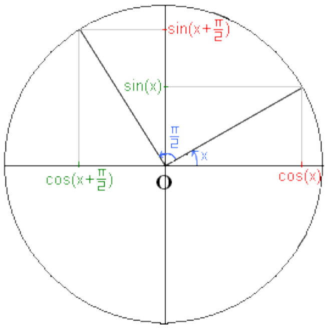
Home



$\cos(-x) = \cos(x)$

et

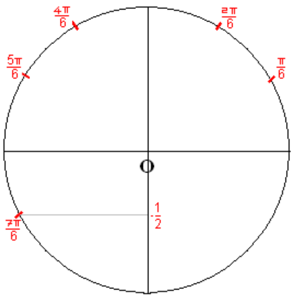
$\sin(-x) = -\sin(x)$



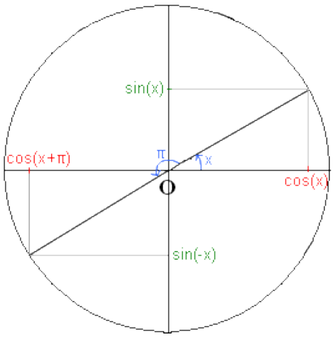
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

et

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$



$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$



$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

et

$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

Voir valeur remarquables
N=6 ou multiple

$$tangeante = \frac{sinus}{cosinus}$$

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus

Voyons maintenant la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus.
Ce sont des courbes **sinusoïdales** identiques, mais un peu décalées.

Définitions et autres propriétés des fonctions sinus et cosinus

Une fonction **périodique** de période T est une fonction f telle que, pour tout nombre x de son ensemble de définition, f(x+T)=f(x).
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. On a toujours cos(x+2π)=cos(x) et sin(x+2π)=sin(x).
Une fonction **paire** vérifie toujours f(-x)=f(x).
Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction cosinus est paire.
Une fonction **impaire** vérifie toujours f(-x)=-f(x).
Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction sinus est impaire.
La dérivée de

f(x)=cos(x) est f'(x)=-sin(x)
g(x)=sin(x) est g'(x)=cos(x).

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$
$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A)\tan(B)}$$
$$\tan(2A) = \frac{2\tan(A)}{1 - \tan^2(A)}$$

Mathématiques
Fiches : Trigonométrie

Date : 26/07/2024

Solution d'une équation

Quelles sont les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans I =[0 ; 4π[

Les solutions de cette équation sont de la forme $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Chercher les valeurs qui sont dans l'intervalle *I* I =[0 ; 4π[

Pour K=1 → *ces* 2 *valeurs conviennent*

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$$

Pour K=1 → *ces* 2 *valeurs conviennent*

$$x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Pour K= -1 → *ces* 2 *valeurs sont trop petites*

$$x_1 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Pour K= 2 → *ces* 2 *valeurs sont trop pgrandes*

L'ensemble des solutions de cette équation est l'intervalle I $S=\left\{\frac{\pi}{4} \middle| \frac{3\pi}{4} \middle| \frac{9\pi}{4} \middle| \frac{11\pi}{4}\right\}$ Home

---

Lien entre les fonctions exponentielle, sinus et cosinus

Comme nous l'avons vu dans ce cours, les fonctions exponentielles, sinus et cosinus sont des fonctions singulières et étonnantes qui possèdent **de nombreuses propriétés**. Ce n'est pas par hasard qu'on les retrouve dans l'étude de très nombreux phénomènes naturels. Mais ce n'est pas tout : ces fonctions sont elles-mêmes reliées entre elles ! Nous verrons ces liens en terminale et au niveau universitaire :

1.La formule

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x),$$

où i est un nombre imaginaire tel que $i^2=-1$, relie ces trois fonctions.

2. En restant dans les nombres bien réels cette fois, et en notant n! le produit des nombres entiers de 1 à n (par exemple, 4!=24), pour tout nombre x, on a :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \text{ etc}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ etc}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ etc}$$

On remarque que le cosinus est formé par les puissances paires de l'exponentielle et le sinus par ses puissances impaires. Les coefficients sont les mêmes, sauf une fois sur deux où ils sont opposés.
