



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

PROBABILITE 3

Vocabulaire

Dans une **EXPERIENCE ALEATOIRE**, on ne s'intéresse pas aux chances de réalisation d'une seule **ISSUE**, mais à celles d'un **ensemble de plusieurs ISSUES**.

Un **EVENEMENT** est un ensemble formé d'une ou **plusieurs ISSUES** relatives à une même **EXPERIENCE ALEATOIRE**.

Notation : En **PROBABILITES**, le langage et les notations sur les ensembles sont très utilisés.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.

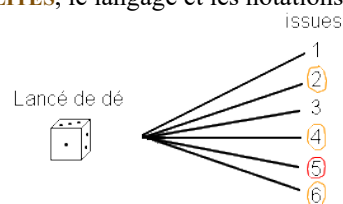
On s'intéresse aux chances d'obtenir un nombre strictement plus petit que 3.

Cette **possibilité** contient 2 **ISSUES** :
"obtenir 1" et "obtenir 2".

Exemple : **EXPERIENCE ALEATOIRE** : LANCE d'un dé à 6 faces.

ÉVENEMENT E :

"Obtenir un nombre strictement plus petit que 3".



A = "Obtenir 5" est un événement formé par une seule issue.

A = {5}

B = "Obtenir un nombre pair" est un événement.

B = {2, 4, 6}

PROBABILITE d'un EVENEMENT

PROBABILITE d'une ou plusieurs ISSUE

(**PROBABILITE** = n avec $0 < n < 1$ (proche de 0 : très improbable, proche de 1 : très probable)).

Par exemple :

SI la **PROBABILITE** qu'il pleuve demain est $\frac{17}{20} = 0,85$, il y a de fortes chances qu'il pleuve demain.

SI la **PROBABILITE** de gagner au loto est 0,00000034, on a très peu de chances de gagner.

Loi de PROBABILITE d'une EXPERIENCE ALEATOIRE

$$\sum_{n=0+}^n \text{des probabilités des issues} = 1$$

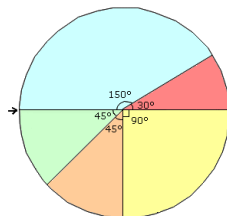
SI toutes les **ISSUES** sont **équiprobables**

ALORS $P = \frac{1}{n}$

Pour bien visualiser les **PROBABILITES** des **ISSUES** d'une **EXPERIENCE ALEATOIRE**, on peut faire un tableau à deux lignes dans lequel on écrit sur la première ligne les différentes **ISSUES** et sur la deuxième leurs **PROBABILITES**. Un tel tableau est appelé une **loi de PROBABILITE**.

Exemple 1 : roulette qui tourne

On regarde la couleur au bout de la flèche lorsque la roue s'arrête.



Loi de probabilité

issue	bleu	rouge	jaune	orange	vert
proba	$\frac{150}{360}$	$\frac{30}{360}$	$\frac{90}{360}$	$\frac{45}{360}$	$\frac{45}{360}$

Issues non équiprobables

Exemple 2 : lancé d'un dé à 6 faces

On regarde le nombre indiqué par le dé.



Loi de probabilité

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

issues équiprobables

PROBABILITE d'un EVENEMENT

C'est la somme des **PROBABILITES** des **ISSUES** qui le compose.

Exemple : LANCE d'un dé non truqué à 6 faces.

On considère l'**EVENEMENT** A="Obtenir 5 ou 6".

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (se lit : "P de A égal un tiers").



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

Evénements particuliers

L'**EVENEMENT certain** est formé par l'ensemble de toutes les **ISSUES** d'une **EXPERIENCE ALEATOIRE**.
On est sûr qu'il va se produire. $P=1$

L'**EVENEMENT impossible** ne contient aucune **ISSUE** de l'**EXPERIENCE ALEATOIRE**.
Il ne va pas se produire. $P=0$.

L'**EVENEMENT contraire** d'un **EVENEMENT A** est l'**EVENEMENT B** qui contient toutes les **ISSUES** de l'**EXPERIENCE ALEATOIRE** que A ne contient pas. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Par exemple, pour un **LANCE** de dé,

SI A est l'**EVENEMENT "obtenir un nombre impair"**, ce qui se représente en notation ensembliste par $\{1;3;5\}$,

ALORS l'**EVENEMENT** contraire de A est l'**EVENEMENT "obtenir un nombre pair"**, qui se représente par $\{2;4;6\}$.

Les **EVENEMENTS incompatibles** n'ont pas d'**ISSUE** commune.

Toujours dans le cas du **LANCE** d'un dé à 6 faces, les **EVENEMENTS** $\{1;2\}$ et $\{5;6\}$ sont incompatibles.

PROBABILITES et fréquence

Pour une **expérience** répétée un grand nombre de fois, on remarque que la **fréquence** d'apparition d'une valeur se rapproche de sa **PROBABILITE** avec le temps.

Ce phénomène est connu sous le nom de "**loi des grands nombres**".

Exemple : on lance 20 fois de suite un dé à 6 faces, on obtient le tableau suivant :

ISSUES (chiffre obtenu)	1	2	3	4	5	6
Apparitions	3	0	5	3	4	5
Fréquence	0,15	0	0,25	0,15	0,2	0,25

Exemple : on effectue **ALORS** 80 LANCES supplémentaires. On obtient le tableau suivant :

ISSUES (chiffre obtenu)	1	2	3	4	5	6
Apparitions	18	11	21	16	17	17
Fréquence	0,18	0,11	0,21	0,16	0,17	0,17

Exemple : on fait encore 400 LANCES supplémentaires et on obtient le tableau suivant :

Chiffre obtenu	1	2	3	4	5	6
Apparitions	78	76	88	84	85	89
Fréquence	0,156	0,152	0,176	0,168	0,17	0,178

On constate que les fréquences d'apparition de chaque valeur se rapprochent de leurs **PROBABILITES**, qui sont toutes un sixième soit environ 0,167.



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

PROBABILITE 2

PROBABILITE d'un EVENEMENT

PROBABILITE d'une ou plusieurs ISSUE

(**PROBABILITE** = n avec $0 < n < 1$ (proche de 0 : très improbable, proche de 1 : très probable)).

Par exemple :

SI la **PROBABILITE** qu'il pleuve demain est $\frac{17}{20} = 0,85$, il y a de fortes chances qu'il pleuve demain.

SI la **PROBABILITE** de gagner au loto est 0,00000034, on a très peu de chances de gagner.

Loi de PROBABILITE d'une EXPERIENCE ALEATOIRE

$$\sum_{n=0}^n \text{des probabilités des issues} = 1$$

SI toutes les **ISSUES** sont équiprobables **ALORS** $P = \frac{1}{n}$

Calcul de la PROBABILITE d'une ISSUE

1. **SI** l'**EXPERIENCE ALEATOIRE** se produit **une seule fois**.

Dans ce cas, la **PROBABILITE** d'une **ISSUE** se calcule en divisant 1 par le nombre d'**ISSUES** (Situation d'équiprobabilité) ou en regardant les données du problème.

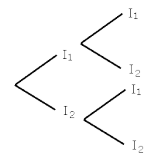
$$P = \frac{1}{\text{nombre d'issues}}$$

2. **SI** l'**EXPERIENCE ALEATOIRE** se produit **plusieurs fois**

Dans ce cas, les **ISSUES** sont des combinaisons formées chacune par la succession des **ISSUES** de chaque réalisation, appelée **épreuve**.

Pour calculer des **PROBABILITES** dans ce cas, il est recommandé, dans la mesure du possible (pas trop d'**épreuves**), de faire un dessin appelé "**arbre de PROBABILITE**".

SI l'expérience possède deux **ISSUES** et se produit deux fois de suite, l'arbre sera comme ceci :



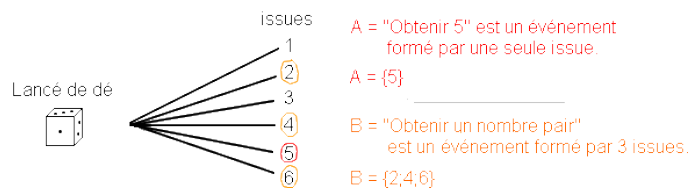
Le nombre d'ISSUES totales est le nombre de branches, ici 4.

PROBABILITE d'un EVENEMENT

Un **EVENEMENT** est un ensemble d'une ou **plusieurs ISSUES**.

Pour écrire des **EVENEMENTS**, on utilise le langage et les notations sur les ensembles.

Exemple



La **PROBABILITE** d'un **EVENEMENT** est la somme des **PROBABILITES** des **ISSUES** qui le compose.

Union et intersection d'EVENEMENT

Intersection

L'intersection des **EVENEMENTS** A et B, est l'**EVENEMENT** qui contient les **ISSUES** communes aux **ISSUES** de A et de B.
notée $A \cap B$

Union

L'union de deux **EVENEMENTS** A et B, est l'**EVENEMENT** qui contient toutes les **ISSUES** de A et toutes celles de B.
notée $A \cup B$

Exemple : **EXPERIENCE ALEATOIRE** : LANCE d'un dé à 6 faces.

EVENEMENT A : "obtenir un nombre pair" et **EVENEMENT** B : "obtenir un nombre strictement supérieur à 3".

• $E_1 = A \cap B$: "obtenir un nombre pair et strictement supérieur à 3".

• $E_2 = A \cup B$: "obtenir un nombre pair ou strictement supérieur à 3".

$$A = \{2, 4, 6\} \mid B = \{4, 5, 6\} \mid A \cap B = \{4, 6\} \mid A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

PROBABILITE d'une union

La formule ci-dessous permet de calculer la **PROBABILITE** de l'union de deux **EVENEMENTS** lorsqu'on connaît la **PROBABILITE** de chacun d'entre eux et la **PROBABILITE** de leur intersection.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Un **EVENEMENT** peut très bien être formé par une seule **ISSUE**.

Un **EVENEMENT** est une union d'**EVENEMENTS** élémentaires contenant chacun les **ISSUES** d'une.

Un **EVENEMENT** est une union d'**EVENEMENTS** élémentaires contenant chacun les **ISSUES** d'une **EXPERIENCE**.

PROBABILITE 1

EXPERIENCE ALEATOIRE à plusieurs épreuves

Lorsqu'une **expérience** contient **plusieurs épreuves**, on peut faire un **arbre de PROBABILITES**.
Sur une feuille, on part d'un point à gauche, on tire des traits qui dirigent vers les **ISSUES** de la première **épreuve**, et on note sur les branches les **PROBABILITES** correspondantes.

Exemple : pour un **LANCE** à pile ou face d'une pièce truquée avec une **PROBABILITE** de pile de 0,4

Premier LANCE	Deuxième LANCE	Troisième LANCE

Après 3 **LANCES**, il y a au total 8 **ISSUES**.

Elles ne sont pas équiprobables : la **PROBABILITE** d'obtenir P-P-P est nettement plus faible que celle d'obtenir F-F-F.

On calcule la **PROBABILITE** d'une **ISSUE** en multipliant les **PROBABILITES** inscrites sur les branches qui mènent à elle.

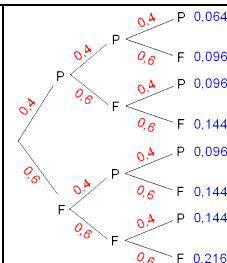
Exemple,

La **PROBABILITE** d'obtenir 3 fois pile est $0,4^3=0,064$.

La **PROBABILITE** d'obtenir pile puis face puis pile est $0,4 \times 0,6 \times 0,4=0,096$.

La **PROBABILITE** d'obtenir 3 fois face est $0,6 \times 0,6 \times 0,6=0,216$.

On peut écrire les **PROBABILITES** de chaque **ISSUE** à droite des branches de l'arbre.



Maintenant,

SI on souhaite connaître la **PROBABILITE** d'obtenir au moins 2 fois pile lors de 3 **LANCES**,

ALORS il faut additionner les **PROBABILITES** de toutes les branches correspondantes.

Il y en a 4 : P-P-P, P-P-F, P-F-P et F-P-P.

Comme $0,064+0,096+0,096+0,096=0,352$, la **PROBABILITE** d'obtenir au moins deux fois pile est 0,352.

Remarque : Cette méthode fonctionne également **SI** les expériences qui se suivent ne sont pas identiques !



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

PROBABILITES conditionnelles

Prenons maintenant un problème concret.

Roger Federer et Raphaël Nadal jouent au tennis en finale du tournoi de Wimbledon.

SI Federer remporte le premier set, il a **8 chances sur 10** de remporter le match.

SI Nadal remporte le premier set, il a **1 chance sur 2** de remporter le match.

On sait enfin que **Nadal** n'a que **3 chances sur 10** de gagner le premier set.

Quelle est la **PROBABILITE** que Nadal remporte le match ?

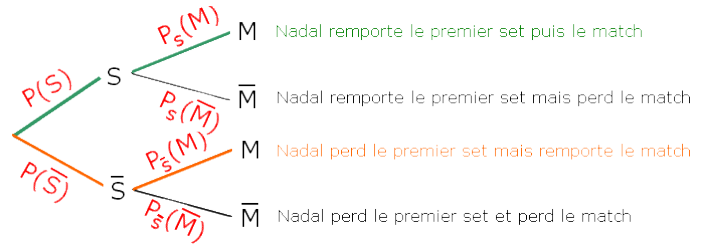
SI Appelons **S** et **M** les **EVENEMENTS**

{S = "Nadal remporte le premier set" $P(3 \div 10 = 0,3)$

{M = "Nadal remporte le match" $P(1 \div 2 = 0,5)$ "

ALORS

Nadal peut gagner le match en ayant gagné le premier set ou en l'ayant perdu.



Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons calculer les **PROBABILITES** de ces deux

ISSUES en multipliant les **PROBABILITES** Situées sur les branches.

Sur cet arbre, il y a des **PROBABILITES** avec des indices : ce sont les **PROBABILITES conditionnelles**.

$P_s(M) \Leftrightarrow$ **PROBABILITE de M sachant S**

PROBABILITE que « Nadal remporte le match » sachant qu'il « remporté le premier set ».

$$P(S) = 0,3$$

$$P(\bar{S}) = 0,7$$

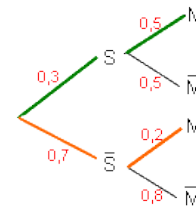
$$P_s(M) = 0,5$$

$$P_s(\bar{M}) = 0,5$$

$$P_{\bar{s}}(M) = 0,2$$

$$P_{\bar{s}}(\bar{M}) = 0,8$$

Données de l'énoncé



L'**EVENEMENT** "Nadal gagne le premier set et remporte le match" est l'**EVENEMENT** $S \cap M$

Sa **PROBABILITE** est le produit des **PROBABILITES** qui se trouvent sur la branche correspondante.

$$P(S \cap M) = P(S) * P_s(M) = 0,3 * 0,5 = 0,15$$

L'**EVENEMENT** "Nadal perd le premier set et remporte le match" est l'**EVENEMENT** $\bar{S} \cap M$

$$\bar{S} \cap M = P(\bar{S}) * P_{\bar{s}}(M) = 0,7 * 0,2 = 0,14$$

Pour calculer la **PROBABILITE** que Nadal remporte le match, comme nous l'avons vu précédemment, il faut additionner les deux **PROBABILITES** précédentes. On dit qu'on applique la formule des **PROBABILITES totales**.

$$P(M) = P(S \cap M) + P(\bar{S} \cap M) = 0,15 + 0,14 = 0,29$$

Raphaël Nadal a **29 % de chances de gagner le match**.

Remarques

1-D'après ce que nous avons vu ci-dessus, nous avons, quel que soient les **EVENEMENTS** A et B, la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

2. Pour une **EXPERIENCE ALEATOIRE** à **plusieurs épreuves**,

SI les résultats d'une **épreuve** n'influent pas sur les résultats des suivantes, on dit que les **épreuves** sont indépendantes.

L'indépendance de deux **épreuves** A et B, ou de deux **EVENEMENTS** A et B, est caractérisée par le fait que

la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

3. Les **PROBABILITES** conditionnelles peuvent aussi intervenir dans le cas d'expériences aléatoires à une seule **épreuve**, mais avec deux caractères différents étudiés sur l'univers choisi.

Exemple, **SI** dans une classe de 30 élèves, on étudie deux caractères : le régime interne, demi-pensionnaire ou externe de l'élève, et le fait qu'il utilise ou non le Site "comprendre les maths" pour s'aider en maths, on peut se poser la question de la **PROBABILITE** qu'un élève de la classe utilise cmath sachant que c'est un interne. Dans ce cas, on calcule la **PROBABILITE** en effectuant le quotient du nombre d'internes qui utilisent cmath par le nombre d'internes (et non pas par le nombre d'élèves de la classe). Plutôt qu'un arbre, on utilise de préférence un tableau à double entrée pour présenter les données.



Date :
26/07/2024

Mathématiques

Fiches : PROBABILITES

Variables aléatoires

Définitions

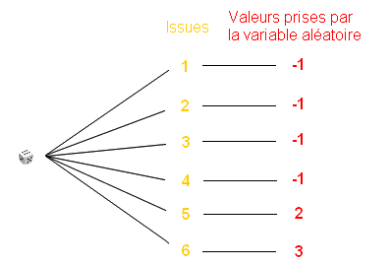
Une **variable aléatoire** est une fonction qui s'applique sur les issues d'une expérience aléatoire.

Exemple

La règle d'un jeu est la suivante : "On lance un dé à 6 faces. Si le nombre obtenu est strictement inférieur à 5, on perd un euro. S'il est égal à 5, on gagne deux euros. Si on obtient 6, on gagne 3 euros".

Le gain à ce jeu est une variable aléatoire, car on associe des nombres aux issues d'une expérience aléatoire.

Appelons G cette variable aléatoire. G peut prendre les valeurs -1, 2, ou 3 (€).



Loi de probabilité

La **loi de probabilité d'une variable aléatoire** est un tableau à deux lignes.

Sur la première ligne, on écrit les valeurs prises par la variable aléatoire, et sur la deuxième, leurs probabilités.

La probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur x_i se calcule en effectuant la somme des probabilités des issues qui mènent à x_i .

Pour ce jeu, on a le tableau ci contre.

Valeurs x_i prises par G	-1	2	3
$P(G=x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est utile pour calculer son espérance et son écart-type, deux indicateurs qui vont nous dire si ça vaut le coup de jouer à ce jeu.

Attention : Il ne faut pas confondre la loi de probabilité d'une expérience aléatoire et la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Tous deux sont des tableaux à deux lignes. La loi de probabilité d'une expérience aléatoire indique les issues et leurs probabilités tandis que la loi de probabilité d'une variable aléatoire indique les valeurs prises par la variable et leurs probabilités.

Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire G, notée $E(G)$, est un indicateur de ce que l'on peut espérer gagner en jouant une fois à ce jeu.

$E(G)$ se calcule en effectuant la somme des produits des valeurs prises par G par leurs probabilités.

Comme l'espérance est positive, ça vaut le coup de jouer à ce jeu.

Mais bien sûr, on prend un risque. L'écart-type est une mesure de ce risque.

$$\begin{aligned} E(G) &= (-1) \times \frac{4}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= -\frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Variance et écart-type

Pour calculer l'écart-type de G, noté écart type, il faut d'abord calculer la variance de G, notée $V(G)$, en effectuant (accrochez-vous bien!) la somme des produits des carrés des différences entre $E(G)$ et les valeurs prises par G, par leurs probabilités.

Il faut ensuite calculer la racine carrée de la variance.

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{101}}{6} \approx 1,7$$

$$\begin{aligned} V(G) &= \left[\left(-1 - \frac{1}{6} \right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{1}{6} \right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{1}{6} \right)^2 \times \frac{1}{6} \right] \\ &= \frac{196}{216} + \frac{121}{216} + \frac{289}{216} \\ &= \frac{101}{36} \end{aligned}$$

Annotations : carrés, somme, différences entre g_i et $E(G)$, produit par les probabilités

Remarques

1. La formule de la variance peut s'écrire $V(x) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(x))^2$ ce qui se lit : "somme pour les nombres i variant de 1 à n des $p_i(x_i - E(X))^2$ ".

2. Si on modifie le jeu de la façon suivante : "on perd 2 euros si on fait moins de 5, on gagne deux euros si on fait 5 et on gagne 7 euros si on fait 6",

et qu'on note Y le gain, alors l'espérance de Y est égale à celle de X, mais son écart-type est plus grand (3,4 contre 1,7) :

On peut espérer gagner autant, mais on risque de perdre ou de gagner plus.



Date :
26/07/2024

Mathématiques

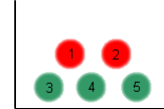
Fiches : PROBABILITES

PROBABILITE T

Dénombrement

On utilise une urne qui contient :

- 5 boules numérotées de 1 à 5
- Dont trois vertes et deux rouges.



Exemple 1

On tire une boule, quelle est la **PROBABILITE** qu'elle soit verte ?

$$\text{Réponse : } \mathbb{P}(\text{Verte}) = \frac{3 \text{ (boules vertes)}}{5 \text{ (issues)}}$$

Exemple 2

On tire 5 fois de suite une boule puis on la repose dans l'urne.

Quelle est la **PROBABILITE** de tirer 5 fois une boule rouge ?

$$\text{Réponse : } \mathbb{P}(\text{Rouge}) = \left(\frac{2 \text{ (boules rouges)}}{5 \text{ (issues)}} \right)^5$$

Exemple 3

On tire successivement 3 boules sans les remettre dans l'urne.

Quelle est la **PROBABILITE** d'obtenir 2 vertes et une rouge ?

Réponse

L'arbre de probabilité possède 60 branches ($5 \text{ (boules)} \times 4 \text{ (!)} \times 3 \text{ (n tirage)}$).

Seules les **ISSUES** V-V-R, V-R-V et R-V-V conviennent.

$$\frac{3}{5} * \frac{2}{4} * \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{5} * \frac{2}{4} * \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{5} * \frac{3}{4} * \frac{2}{3} \right) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

Rappel sur les coefficients binomiaux

$$\binom{25}{24} = \binom{\text{Parmis les 5 épreuves}}{\text{Nombre de chemin ou il ya 24 succes}}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 2 + 1 = 6$$

Exemple 4

On tire simultanément 3 boules.

De combien de manières différentes peut-on faire cela ?

Réponse

Il faut calculer le nombre de sous-ensembles de 3 éléments dans un ensemble de 5 éléments.

Ce résultat s'obtient en utilisant les coefficients binomiaux. C'est le nombre $\binom{5 \text{ (boules)}}{3 \text{ (boules simultanément)}}$, qui fait 10.

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{1} = 3 + \binom{2}{1} + 4 = 3 + 2 + 4 = 10$$

Exemple 5

On tire simultanément 3 boules.

Quelle est la **PROBABILITE** de tirer 2 vertes et une rouge ?

Réponse

Il faut diviser le nombre de cas favorables par le nombre de cas total.

Le nombre de cas favorables est égal au nombre de **possibilités** de tirer 2 vertes parmi 3 vertes multiplié par le nombre de **possibilités** de tirer une rouge parmi 2 rouges.

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3 ; \binom{2}{1} = 2 \text{ et } \binom{5}{3} = 10$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{3 * 2}{10} = \frac{3}{5}$$