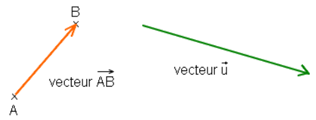
Mathématiques
Fiches : Vecteurs

Date :
26/07/2024

Vecteurs 2

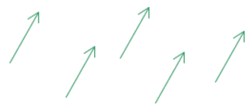
Notations



Si un **vecteur** va d'un point **A** à un point **B**, on le note $\overrightarrow{AB}$.
Si les points d'origine et d'arrivée n'ont pas de nom,
on peut simplement noter le vecteur avec une petite flèche au-dessus d'une lettre en minuscule, par exemple le **vecteur** $\vec{u}$.

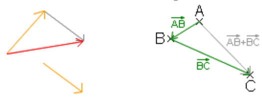
Opérations avec les vecteurs

Egalité
Si 2 vecteurs ont la même **direction**, le même **sens**, et la même **longueur**.
Alors ils sont égaux
Ils peuvent cependant avoir un point d'origine différent.



Les vecteurs représentés ci-dessus sont tous égaux.

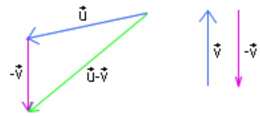
Somme
La somme de deux vecteurs qui sont placés l'un au bout de l'autre est le vecteur qui part de l'origine du premier et qui arrive au bout de la flèche du deuxième.
Si A, B et C sont 3 points,
Alors on a toujours $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
$Pour\ L, I, U :\ \overrightarrow{IU} + \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IU} = \overrightarrow{LU}$ (relation de Chasles).



La somme des deux vecteurs oranges est le vecteur rouge.
On commence par placer les deux vecteurs l'un au bout de l'autre.

Différence
La différence de deux vecteurs est la somme du premier et de l'opposé du second.

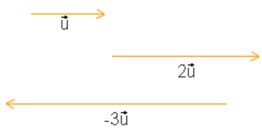
L'**opposé** d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur de même **longueur** et de même **direction** que $\vec{u}$, mais de **sens opposé** (la flèche est tournée dans l'autre sens).



Pour construire $\vec{u}-\vec{v}$ on construit $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Si **A** et **B** sont deux points,
Alors .$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Produit ou quotient
Le produit (ou le quotient) d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre k est un vecteur de même **direction** que $\vec{u}$, de longueur multipliée (ou divisée) par k, et **de sens contraire** à celui de $\vec{u}$ **si k est négatif.**

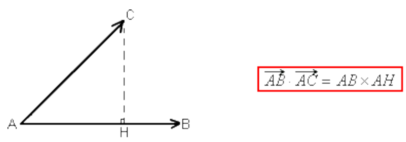


Remarques
Si deux vecteurs ont la même **direction**, Alors ils sont colinéaires.
Le produit de deux vecteurs existe aussi = **produit scalaire** en première.
Il n'est pas possible de diviser deux vecteurs entre eux (sauf s'ils sont colinéaires), ni d'additionner ou de soustraire des nombres avec des vecteurs.
Mettre $\overrightarrow{AB}$ $sous\ la\ forme\ d'unmultipe\ de\ \overrightarrow{BC}$: $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$2\overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$
$-\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{BC}$

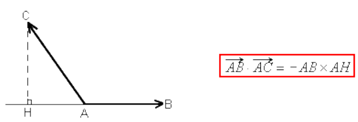
Vecteur 1

Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre proportionnel à la **longueur** de chaque vecteur et dépendant de **l'angle** qu'ils forment.
L'opérateur du produit scalaire se note avec un point au lieu du ×.
Produit scalaire sur un dessin
Dans un plan muni d'un repère orthonormé, prenons deux vecteurs partant d'un même point d'origine et formant un angle inférieur à 90 degrés.
Leur produit scalaire est le produit de la longueur du premier par la longueur du projeté orthogonal du deuxième sur la droite qui porte le premier.



Si l'angle est compris 90° et 180°, c'est le nombre opposé.



Mathématiques
Fiches : Vecteurs

Date :
26/07/2024

Calculs avec le produit scalaire
On calcule avec le produit scalaire comme on calcule avec un produit normal.

$0\cdot\vec{u}=0$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

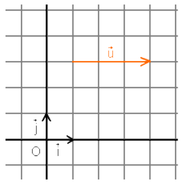
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{x})=\vec{u}.\vec{w}+\vec{u}.\vec{x}+\vec{v}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{x}$

Orthogonalité et norme

Orthogonalité
Si le produit **scalaire** de deux vecteurs est **nul**,
Alors ces vecteurs sont **orthogonaux**.
Si les droites d'application de 2 vecteurs non nul sont perpendiculaires
Alors leur produit scalaire est nul
(ainsi, le projeté orthogonal du deuxième sur le premier est un point, de longueur nulle).

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Norme
La **norme** d'un vecteur est une mesure de sa longueur relativement au repère dans lequel il est placé.
On note la norme avec des doubles barres verticales.
Un vecteur peut très bien avoir une norme différente de sa longueur en centimètres !



$\|\vec{u}\|=3$

Dans un repère orthonormé, si , $\vec{u}\binom{x}{y}$ alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
(théorème de Pythagore).

Calcul du produit scalaire

Avec la norme des vecteurs et l'angle qu'ils forment, on utilise la formule du cosinus.

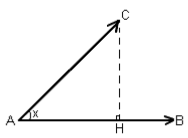
En notant $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ la mesure de l'angle orienté entre ces deux vecteurs, on a aussi :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$

Et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos(\vec{u},\vec{v})$$

Si 0<x<90°



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$

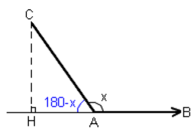
Mais comme $\cos(x)=\frac{AH}{AC}$

AH=AC×cos(x)

et donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(x)$

Si 90°<x<180°



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$

Mais comme $\cos(180-x)=\frac{AH}{AC}$

AH=AC×cos(180-x)=-AC×cos(x)

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times(-AC\times\cos(x))$

d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(x)$

Avec les coordonnées des vecteurs
Dans un repère orthonormé,

Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ *et* $\vec{v}\left(\binom{x'}{y'}\right)$

alors on peut écrire $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})\\ &= x\vec{i}\cdot x'\vec{i}+x\vec{i}\cdot y'\vec{j}+y\vec{j}\cdot x'\vec{i}+y\vec{j}\cdot y'\vec{j}\\ &= xx'\underbrace{\vec{i}^2}_{=1}+xy'\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{=0}+yx'\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{=0}+yy'\underbrace{\vec{j}^2}_{=1}\\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

On a donc la formule $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$.

Vecteurs TS+

Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble stable

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \text{ et } \forall y \in E, \quad \alpha x + \beta y \in E$$

Un espace vectoriel est donc un ensemble infini et indénombrable dans lequel on peut **additionner** des éléments entre eux ou les **multiplier** par des nombres.
Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**.

Exemples

$E_1 = \{0;1;2\}$ n'est pas un espace vectoriel.
$E_2 = \mathbb{R}$ est un espace vectoriel (5 est donc un vecteur de $\mathbb{R}$).
L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0;1]$ est un espace vectoriel (une fonction de cet ensemble est un vecteur de cet espace vectoriel).
Les vecteurs vus en seconde sont un cas particulier de vecteurs: ce sont vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Base d'un espace vectoriel

Pour repérer la position d'un vecteur dans un espace vectoriel,
On exprime ce vecteur en fonction de plusieurs vecteurs référant, qui forment alors ce que l'on appelle une **base de l'espace vectoriel**.
Un système de vecteurs forme une base d'un espace vectoriel lorsque tout vecteur de l'espace vectoriel peut s'exprimer d'une manière **unique** en fonction des vecteurs de la base.

Exemples

- Le **système** $\{\vec{u};\vec{v}\}$ avec $\vec{u} = (1;2)$ *et* $\vec{v} = (2;4)$ ne forme pas une base de $\mathbb{R}^2$ car le vecteur $\vec{w} = (1;3)$ ne peut pas s'exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le **système** $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ avec $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$ car le vecteur $\vec{z}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ ne se décompose pas d'une manière unique en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. En effet, on a $\vec{z} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{z} = 3\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$.
- Le **système** $\{\vec{u};\vec{v}\}$ avec $\vec{u} = (1;2)$ *et* $\vec{v} = (1;3)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

Vocabulaire

- La **dimension** d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs qui forment une base de cet espace vectoriel.
- Les **coordonnées** d'un vecteur dans une base sont les coefficients qui permettent d'exprimer ce vecteur en fonction des vecteurs de la base. Par exemple, le vecteur $\vec{n} = (5;12)$ a pour coordonnées $\vec{n}(3;2)$ dans la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$.
- Une **famille de vecteurs** dans laquelle aucun élément ne peut s'exprimer en fonction des autres s'appelle une famille de vecteurs **libres**.
- Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ sont n vecteurs libres, l'ensemble des combinaisons linéaires formées avec ces vecteurs, $\{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}^n\}$ est appelé **espace vectoriel engendré** par les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

Remarque

Un espace vectoriel peut admettre plusieurs bases différentes, par exemple $B_1 = \{(0,5);(5,0)\}$ et $B_2 = \{(0,2);(3,0)\}$ sont deux bases différentes de $\mathbb{R}^2$.
Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut donc avoir des coordonnées différentes suivant la base que l'on considère.

Mathématiques
Fiches : Vecteurs

Date : 26/07/2024

Conditions pour former une base

Comment savoir si un système de vecteurs forme une base d'un espace vectoriel ?
Il faut que chaque vecteur de l'espace vectoriel se décompose en fonction des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ de la base, et cela d'une manière unique.
La famille de vecteurs doit être à la fois génératrice de E (elle engendre E) et libre. Cela se traduit par :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \vec{v} \in E,\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \quad \textit{tels que} \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n \\ \text{et} \\ \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \end{array}}$$

Ainsi, pour qu'une famille de vecteurs forme une base d'un espace vectoriel, il faut qu'elle vérifie les 2 conditions ci-dessus.

1 **<u>Exemple</u>**

Cherchons si la famille de vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, avec $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple :

Cherchons si la famille de vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, avec $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$
Il faudrait pouvoir exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$.
Pour cela, il faut chercher s'il existe 3 réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et tel que $\vec{u} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}$
Cela se traduit par:
2. La famille est-elle libre?
Soient 3 réels tels que $\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3} = 0$.
Cherchons si . $\alpha_1 =, \alpha_2 =, \alpha_3 = 0$.

On a : $\begin{cases} 1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$

3 En travaillant sur ce système, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -4\alpha_2 - 7\alpha_3 \\ -8\alpha_2 - 14\alpha_3 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ -12\alpha_2 - 21\alpha_3 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -4\alpha_2 - 7\alpha_3 \\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \\ -6\alpha_2 - 12\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -4\alpha_2 - 7\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

On peut avoir $\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3} = 0$. avec , et $\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 1$ et $\alpha_3 = 1$
donc la famille $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, n'est pas libre. Cette famille de vecteurs ne forme donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.