Mathématiques
Fiches : Nombres complexes

Date : 17/08/2024

Complexe TS

Calcul avec des nombres complexes

Pour **additionner** ou **soustraire** deux nombres complexes,
on additionne ou soustrait séparément leurs parties **réelles** et **imaginaires**.
Pour calculer le **produit** de deux nombres complexes,
on utilise la double distributivité et la propriété $i^2=-1$.

Pour calculer le **quotient** de deux nombres complexes,
on multiplie d'abord les deux nombres par le **conjugué** du deuxième
puis on simplifie le résultat.
Le conjugué d'un nombre complexe a+bi est le nombre a-bi.

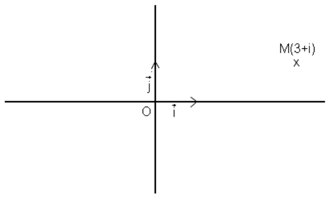
Exemple :
$(2+3j)+(4+5j)=6\ +\ 8j$
Exemple :
$(2+3j)*(4+5j)= 8+10j+12j+15j^2$
$=7+22j$

$$\frac{(2+3j)}{(4+5j)}=\frac{(2+3j)(4-5j)}{(4+5j)(4-5j)}$$
$$=\frac{8-10j+12j-15j^2}{4^2-(5i^2)}$$
$$=\frac{23+2j}{16+25}=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}j$$

Nombre complexe dans le plan

Comme les nombres complexes ont deux composantes
(partie réelle et partie imaginaire)
on peut les placer dans un repère en inscrivant
- la partie réelle sur l'axe des **abscisses** (on parle **d'affixe**)
- la partie imaginaire sur l'axe des **ordonnées**.

On ne parle plus de coordonnées, mais d'**affixe**.
Ci-dessus, le point M a pour affixe 3+i.

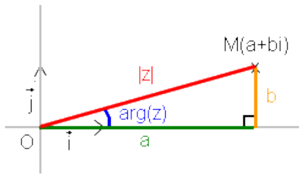


Module et argument
Le **module** d'un nombre complexe z représenté par un point M est la distance OM.
Il est noté $|z|$ et son argument est l'angle orienté $(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$

Pour un nombre complexe z=a + bi, on a toujours :

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\cos(\arg(z))=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin(\arg(z))=\dfrac{b}{|z|}\end{cases}$$

Ces formules proviennent du théorème de Pythagore et de la trigonométrie dans le triangle ci-dessous.



Autres écritures d'un nombre complexe
La connaissance du module et de l'argument permet d'écrire un nombre complexe sous sa **forme trigonométrique** $z=|z|(\cos(arg\ z)+i\sin(arg\ z))$ et sous sa **forme exponentielle** $z=|z|e^{i\ arg(z)}$
Propriétés
Quelques propriétés du module et de l'argument :

$$|z\times z'|=|z|\times|z'|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \quad \text{si } z'\neq 0$$
$$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z') \quad \text{si } z'\neq 0$$

Distances et angles
Voyons maintenant deux formules qui permettent de calculer des distances et des angles dans le plan complexe.
1. Distances
Si A et B sont deux points d'affixes respectives zA et zB
alors : $\boxed{AB=|z_B-z_A|}$
2. Angles
Si de plus C et D sont deux points d'affixes respectives zC et zD,
alors : $\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)}$
