WP-CMS

Mathématiques

Probabilités

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

⟼ *Table − LoiNormalecentréeréduite*

1 Plan du document

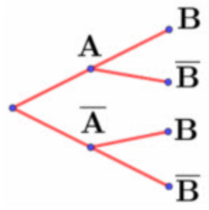
2 Préface

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1.
Plus ce nombre est grand, plus le risque, ou la chance, que l'événement se produise est grand. L'étude scientifique des probabilités est relativement récente dans l'histoire des mathématiques.
L'étude des probabilités a connu de nombreux développements depuis le XVIIIe siècle grâce à l'étude de l'aspect aléatoire et en partie imprévisible de certains phénomènes.

Exemple :

On lance un dé à six faces [Expérience aléatoire].
On s'intéresse aux chances d'obtenir un nombre strictement plus petit que 3 [L'événement].
Cette possibilité contient deux solutions : « obtenir 1 » et « obtenir 2 » [Issues].

a



3 Fiche récapitulative

3.1 Le vocabulaire

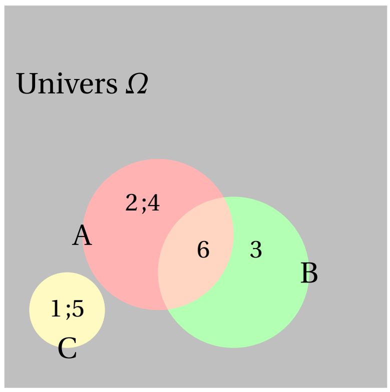
- La **probabilité**, une estimation de la réalisation de quelque chose sur une échelle de 0 à 1.
- L'**expérience** (ou épreuve), processus pour aboutir sur une **issue** imprévisible parmi plusieurs possible.
- L'**événement** : exemple "*je veux obtenir un nombre pair*".
- l'**univers** Ω, ensembles des issues possibles.
- l'**union** $A \bigcup B$, est réalisée dés que "EVT" A ou B est réalisé.
- l'**intersection** $A \bigcap B$, est réalisée dés que "EVT" A et B sont réalisés dans la même expérience.
- Si l'événement A est *"obtenir un nombre pair"*
  Alors l'événement contraire de A noté $\bar{A}$ est l'événement *"obtenir un nombre impair"*.

3.2 Diagramme de Venn

"EVT" A "Obtenir un nombre pair".
"EVT" B "Obtenir un multiple de 3".
"EVT" C "Obtenir le résultat 1 ou 5".

L'univers Ω	1;2;3;4;5;6	Card $A = 6$	P(Ω)= 1
EVT de A	2;4;6	Card $A = 3$	P(A)= $\frac{3}{6}$
EVT de B	3;6	Card $B = 2$	P(B)= $\frac{2}{6}$
EVT de C	1;5	Card $C = 2$	P(C)= $\frac{2}{6}$

$P(A) + P(B = 1 \Rightarrow$ **Si on connait** $P(A)$ **Alors on peut en déduire** $P(B)$



Propriétés importantes : :

$A \bigcup \bar{A} = \Omega$ et $B \bigcup \bar{B} = \Omega$

$A \bigcap \bar{A} = \phi$ et $B \bigcap \bar{B} = \phi$

A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».

$A \bigcup B = \{2;3;4;5;6\}$; $A \bigcup B$ est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».

$A \bigcap B = \{2\}$; $A \bigcap B$ est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».

$$Card(A \bigcup B) = \frac{Card A}{Card \Omega} + \frac{Card B}{Card \Omega} - \frac{Card(A \bigcap B)}{Card \Omega}) \Rightarrow 3+2-1=4$$

Donc $P(A \bigcup)B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ ou\ A\ se\ réalise}{Nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{Card A}{Card \Omega}$$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$ *L'avantage est de diminuer dans certain cas le nombre de calcul.*

3.3 Arbre de probabilité

Expérience aléatoire :

"Lancer de pièce de monnaie"

- EVT P "Obtenir Pile". - EVT F "Obtenir face".

- EVT PP "obtenir pile et pile"

le produit des chemins $P_1 0,5 * P_2 0,5 = 0,25$

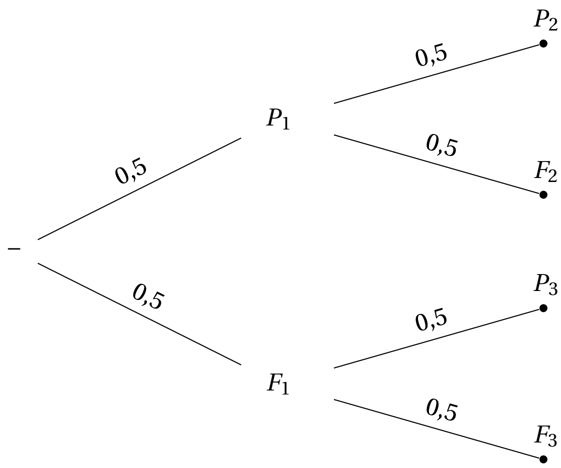
- EVT PP "obtenir face et face"

le produit des chemins $F_1 0,5 * F_3 0,5 = 0,25$

- EVT PP "obtenir pile et face ou face et pile"

le produit des chemins $2(0,5 * 0,5) = 0,5$

Si La probabilité recherchée est "obtenir pile et pile" et "obtenir face et face" Alors la probabilité est de !!!!!



3.4 Probabilité conditionnelle

Expérience Antidopage

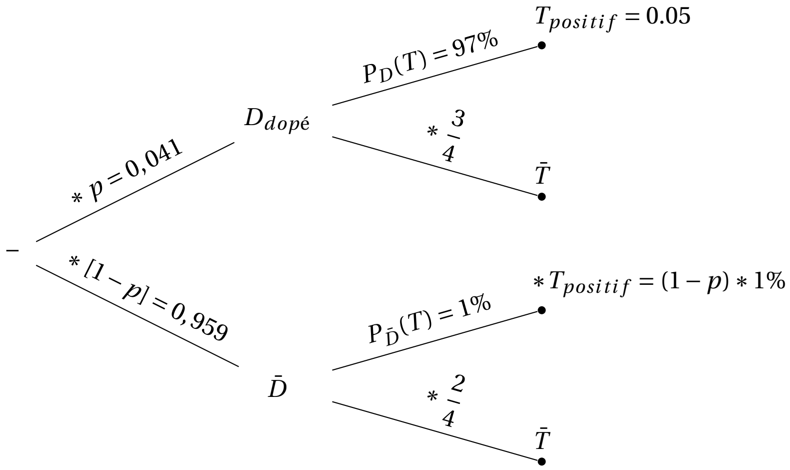
- T "Le contrôle est positif" avec $P(T) = 0,05$
- D "Le coureur est dopé".
- Si dopé, contrôle positif dans 97% des cas
- Si pas dopé, contrôle positif dans 1% des cas

Note : $*$ Déduit par le calcul.

$P(T_{positif}) = 0,05$ [2 branches]

$\Rightarrow 0,97p + 0,01(1-p) = 0,05$

$\Rightarrow p = \dfrac{0,04}{0,96} = 0,041$



Un coureur à un contrôle positif.Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé $P(\bar{D})$.
Avec la condition Un coureur à un contrôle positif $P_T(\bar{D})$.

$$P_T(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \bigcap T)}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = \frac{P(0,959 * 0,01}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = 0,191$$

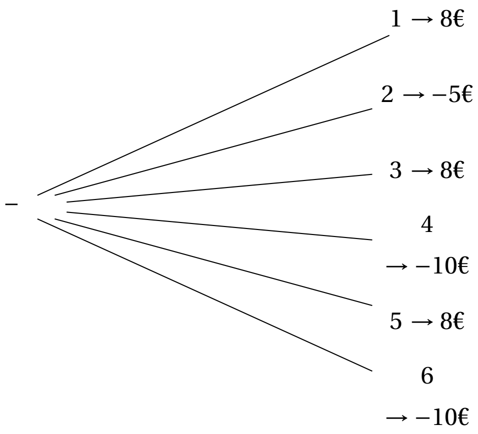
- $P_T(\bar{D})$ est la probabilité de $\bar{D}$ [information conditionnelle] se réalise sachant que T [certifié] s'est réalisé.
- $P(\bar{D} \bigcap T$ est la probabilité que $\bar{D}$ et T se réalisent simultanément
- $P(\bar{D})$ est la probabilité que $\bar{D}$ se réalise.

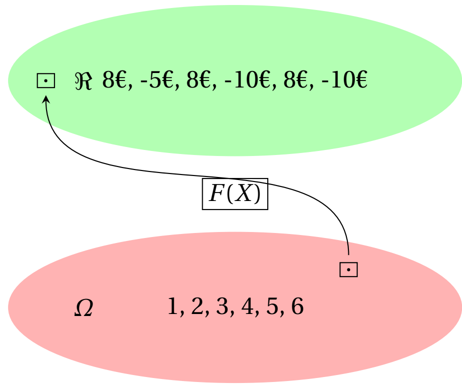
3.5 Événements indépendants

Note : Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

3.6 Variable aléatoire - Loi de probabilité

Expérience : Un joueur lance un dé équilibré.
Si le numéro obtenu est impair, le joueur gagne 8€.| Si le numéro obtenu est 2, il perd 5€. Sinon il perd 10€
On appelle X la variable aléatoire égale au gain ou perte du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X.





Une variable aléatoire est une fonction
qui associe à chaque issue de l'univers Ω un réel.

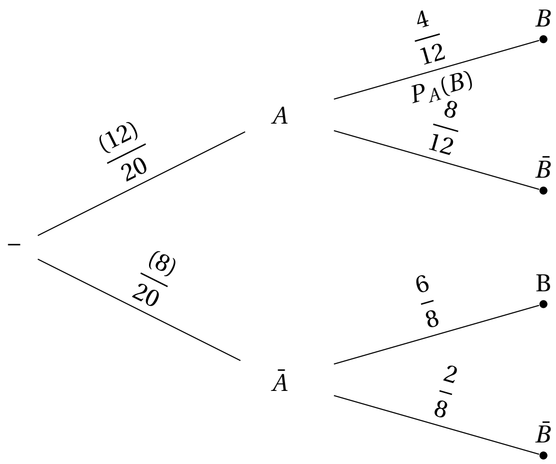
- La loi de probabilité : $P(x = -10\ ou\ -5\ ou\ 8)$

x_i	-10	-5	8	Σ
$P(x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

3.7 Tableau à double entrées

"Sur un échantillon composée de 20 élèves. $\Omega = 20$"
Les élèves aiment l'anglais [8], la biologie [6], les deux [4] et reste [2].

$A\ B$	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



3.8 Loi binomiale

Pré-requis :

Pour appliquer **la loi binomiale** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :

A) être du type "épreuve de Bernoulli". Seuls deux issues sont possible : **Succès** ou **Échec** [Pile ou Face].

x_i	1	0
$P(x = x_i)$	P	$(1-P)$

Légende : 1 = succès et 0 = échec.

B) pouvoir caractériser les paramètres espérance, variance et écart type ;

L'espérance de X	$P \Rightarrow E(X) = P$
La variance de P	$P(1-P) \Rightarrow V(X) = P(1-P)$
L'écart type de X	$\sqrt{P(1-P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1-P)}$

1] La répétition d'une même épreuve aléatoire (exemple : rendre visite à 5 clients)

2] La probabilité de chaque épreuve doit être la même (Exemple : $P = 0.2$)

3] Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

C) être représentée par un arbre de probabilité pondéré.

$$X \sim \mathscr{B}(n, P_{succes}) \Rightarrow P(X = k) = C_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$$

- k, Expérience exemple : nombre de commandes

- n, Événement exemple : nombre de visites

- P_{succes}^k, probabilité d'obtenir un succès.| - $(1-P)_{echec}$, probabilité de l'événement contraire

-$C_n^k = \dfrac{n!}{k! * (n-k)!}$

3.9 Loi géométrique

Expérience : lancer un dé continuellement	**Événement** : "jusqu'à obtenir un six."
Soit X le **nombre de lancers**. $X \sim G(\frac{1}{6})$.	X suit une loi géométrique G de probabilité $\frac{1}{6}$.

-**Probabilité** $P(X = k) = (1-P)^{k-1} * P$

se lit $(1-P)$ ne pas avoir 6 et P avoir 6.

-Moyenne : $E(X) = \frac{1}{P} = 6$

-Variance : $V(X) = \frac{1-P}{P^2} = 30$ -"Obtenir 6 avant le troisième lancer inclus"

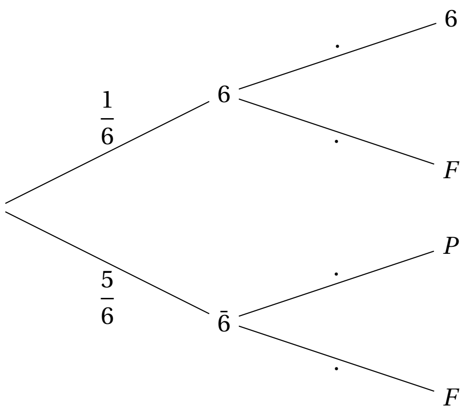
$P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$P(X = 1) = (\frac{5}{6})^{1-1} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$P(X = 2) = (\frac{5}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(X = 3) = (\frac{5}{6})^{3-1} * \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

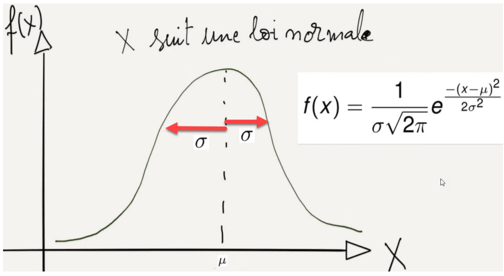
La probabilité est égale à : $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}$

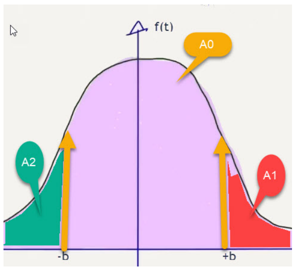


3.10 Loi normale

Dans une loi **binomiale**	Dans une loi **normale**
voir les pré-requis	voir les pré-requis
$X \in \aleph$ est une variable **discrète**	$X \in \Re$ est une variable **continue**
$X = 0, 1, 2..., n$	-
$P(X = k) = \mathbb{C}_n^k P^k * (1 - P)^{n-k}$	-
$X \sim \mathscr{B}(n, P)$	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
n	μ = Moyenne de X ici représenté par m
P probabilité de réussir	σ = Écart type et σ^2 = Variance

Si n devient grand, Alors on passe sur une loi normale.





Si Toutes lois normales Alors elle peut être ramenée à une loi centrale réduite grâce au changement de variable.

> Si X suit la loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
> Alors On remplace X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
> Car $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [0 étant la moyenne et l'origine des axes de la courbe]

Légende : $A1 \Rightarrow P(T \geqslant +b)$ | $A2 \Rightarrow P(T \leqslant +b)$ | $A0 \Rightarrow P = 1$

Propriété très importantes

Dans la table des probabilités, on ne peut calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^+)$

Pour utiliser cette table on doit souvent avoir recours aux propriétés suivantes :

> $P(T \geqslant -a) = P(T \leqslant +a)$ || $P(T \geqslant +b \Leftrightarrow P = 1 - P(T < b)$
> $P(a \leqslant T \leqslant b) \Rightarrow P(T \leqslant b)$-$P(T \leqslant a)$ Si $a < 0$ Alors $P(T \leqslant a)$=$1 - P(T \leqslant +a) \longmapsto a$ dans table.

Procédure

1. Paramétrage de la Loi normal (récupération des données de l'énoncé).
   Si la **moyenne** $\mu = m$ et l'**écart type** $\sigma = e$ Alors $\Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(m, e)$.
2. Traduction mathématique de l'événement "Exemple : coûte au moins 200 €." $\Rightarrow$ $P(X \geqslant 200)$
3. On remplace la variable X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ Exemple : $P(T \geqslant \dfrac{200 - \mu}{\sigma})$.
4. On adapte l'expression de la probabilité à la forme $P(T \leqslant +b)$.
5. On exploite table de probabilité sur la loi normale centrée.

4 Le vocabulaire

- Le terme **probabilité**, c'est l'inverse de la certitude.
  Il s agit d'une estimation de la réalisation de quelque chose sur une échelle de 0 à 1 (1 étant la réalisation).
  0 $\quad$ 0,5 $\quad$ 1

- **Expérience** (ou l'épreuve)**aléatoire**
  aboutit sur un résultat parmi plusieurs possible que l'on ne peu pas prévoir.

- L'**éventualité (ou issue)**
  Il s agit d'un résultat possible

- **L'événement**
  Ensemble de résultats dans une épreuve aléatoire.
  On lance un dés. "Je veux obtenir un nombre pair". C'est un événement.

- **L'univers**
  C'est l'ensemble des résultats possibles.
  L'univers se note Ω
  Si on lance un dés Alors $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

- **Événement certain**
  Tous événement qui réalise l'univers Ω
  Exemple : Pour un lancé de dés. Evt certain "Obtenir un numéro compris entre 1 et 6".

- **Événement impossible**
  Exemple : Pour un lancé de dés. Evt impossible "Obtenir un numéro supérieur à 7".
  L'ensemble des résultats d'un Evt impossible est un ensemble vide $\emptyset$

- **L'union de 2 événements**
  L'événement $A \bigcup B$ **est réalisé dés que** A **ou** B **est réalisé**.

- **L'intersection de 2 événements**
  L'événement $A \bigcap B$ **est réalisé dés que** A **et** B **sont réalisés dans la même expérience.**

- **L'événement contraire**
  Dans le lancer de dé, Si l'événement A est *"obtenir un nombre pair"*, Alors l'événement contraire de A, $\bar{A}$ est l'événement *"obtenir un nombre impair"*.

- **Événement incompatible**
  Si l'intersection de deux événements est un ensemble vide Alors on parle d'événements incompatibles

5 Diagramme de Venn

Expérience aléatoire :

"Lancer d'un dé"

L'univers $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

Événement A "Obtenir un nombre pair". $A = 2;4;6$

Événement B "Obtenir un multiple de 3". $B = 3;6$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5". $C = 1;5$

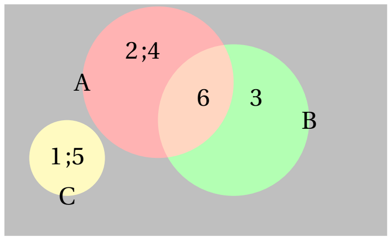
Analyse :

L'univers $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

Événement A "Obtenir un nombre pair". $A = 2;4;6$

Événement B "Obtenir un multiple de 3". $B = 3;6$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5". $C = 1;5$



Démonstration :

$A \bigcup B = \{2;4;3;6\}$

$A \bigcap B = \{6\}$

$\bar{A} = \{1;3;5\}$

$\bar{B} = \{1;2;4;5\}$

$\bar{C} = \{2;3;4;6\}$

$A \bigcap C = \{\phi\}$

La notion de cardinal :

Cardinal $\Omega = 6$

Événement A "Obtenir un nombre pair." Cardinal $A = 3$. $A = \{2;4;6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Événement B "Obtenir un multiple de 3." Cardinal $B = 2$. $B = \{3;6\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5." Cardinal $C = 2$. $C = \{1;5\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Propriétés importantes : :

$A \bigcup \bar{A} = \Omega$ et $B \bigcup \bar{B} = \Omega$

$A \bigcap \bar{A} = \phi$ et $B \bigcap \bar{B} = \phi$

$Card(A \bigcup B) = Card A + Card B - Card(A \bigcap B))$ dans notre exemple $\Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4$

$Card(A \bigcup C) = Card A + Card B$

$Card(A \bigcup B = \frac{Card A}{Card \Omega} + \frac{Card B}{Card \Omega} - \frac{Card(A \bigcap B)}{Card \Omega}) \Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4$

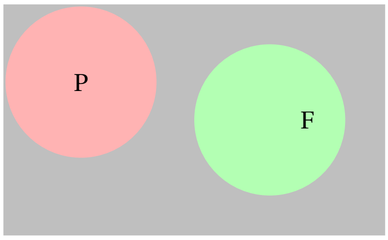
Donc $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

6 Calculer une probabilité

6.0.1 Exemple 1

Expérience aléatoire :
"Lancer une pièce de monnaie"

Analyse :
Deux résultats possible : soit pile ou soit face.



Evénements :

A) Quelle est la probabilité d'avoir Pile ou Face ?
C'est toujours Pile ou Face
$P(\Omega) = 1$ avec $\Omega = \{P; F\}$ et $Card C = 2$

B) Quelle est la probabilité d'avoir Pile ?
$P(P) = \frac{1}{2}$ et $P(F) = \frac{1}{2}$

C) EVT A : "Obtenir Pile" $\Rightarrow A = \{P\}$ et $Card A = 1$

D) EVT B : "Obtenir Face" $\Rightarrow B = \{F\}$ et $Card B = 1$

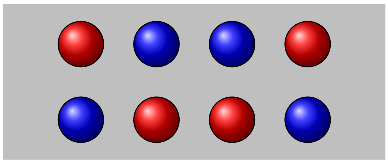
Propriétés importantes : :

$P(A) = \frac{NombredecasouAseréalise}{Nombredecaspossible} = \frac{Card A}{Card \Omega}$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{NombredecasouBseréalise}{Nombredecaspossible} = \frac{Card B}{Card \Omega}$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$

6.0.2 Exemple 2

Expérience aléatoire :

"Un sac contenant des boules de couleurs"



Analyse :

—

Evénements :

A) Quelle est la probabilité de tirer une boule bleu? $\Rightarrow P(b) = \frac{4}{8} = 0,5$

- Si on retire une boule rouge Alors $P(b) = \frac{4}{7}$

- Si on retire trois boules bleue et une boule rouge Alors $P(b) = \frac{1}{3}$

B) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge .$\Rightarrow P(r) = \frac{2}{3}$

Propriétés importantes : Le calcul de la probabilité qu'un événement A se produise est :

$$P(A) = \frac{NombredecasouAseréalise}{Nombredecaspossible}$$

La probabilité P doit vérifier :

1 - Pour tout événement de A, $0 \leq P(A) \leq 1$

2 - $P(\Omega) = 1$

3 - $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

4 - $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B)$ pour $A \bigcap B = 0$

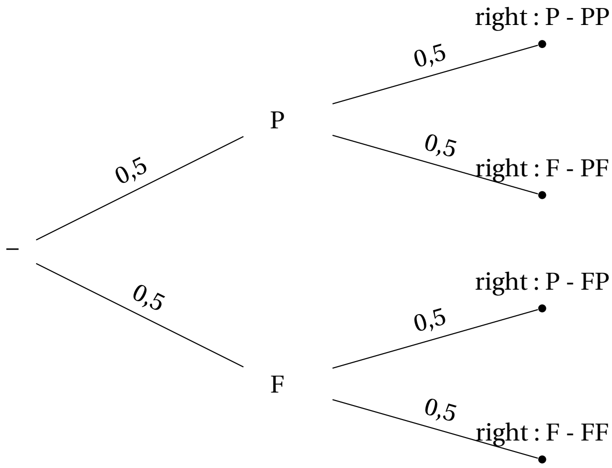
7 Arbre de probabilité

Expérience aléatoire :

"Lancer de pièce de monnaie"

Analyse :

- Événement P "Obtenir Pile".
- Événement F "Obtenir Face".



Evénements :

A) Événement PF : "Obtenir Pile et Face indépendamment de l'ordre". $P(PF) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} soit 25\%$
ou le produit des chemins $2(0,5 * 0,5) = 0,5$

B) Événement PP : "Obtenir Pile et Pile". $P(PP) = \frac{1}{4} = 0,25$
ou le produit des chemins $0,5 * 0,5 = 0,25$

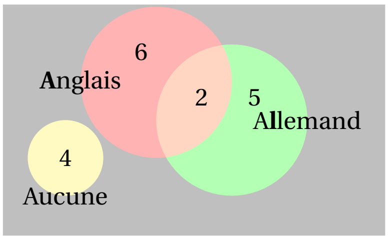
C) Événement FF : "Obtenir Face et Face". $P(FF) = \frac{1}{4}$
ou le produit des chemins $0,5 * 0,5 = 0,25$

8 Probabilité conditionnelle

Expérience aléatoire :

"Une classe est composée de 17 élèves"

–



Analyse :

- 8 élèves étudient l'anglais.
- 7 élèves étudient l'allemand.
- 8 élèves étudient l'anglais et l'allemand.

<u>Evénements :</u>

A) Probabilité qu'un élève n'étudie que l'anglais

$P(A) = \dfrac{8}{17}$

B) Probabilité qu'un élève n'étudie que Allemand

$P(L) = \dfrac{7}{17}$

C) "Probabilité conditionnelle".

1] information certifiée → On sait qu'un élève étudie l'anglais ⇒ $\Omega = A$,

2] Information conditionnelle → c'est quoi la probabilité qu'il étudie l'allemand ?"

$P_A(L) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow P_A(L) = \dfrac{P(A \bigcap L)}{P(A)} \Leftrightarrow P_A(L) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Note : Quand on écrit $P_A(L)$, on lit la probabilité de L $P(L)$ sachant que A est déjas réalisé.

Probabilité conditionnelle

$P_A(L) = \dfrac{P(A \bigcap L)}{P(A)}$

9 Événements indépendants

Expérience aléatoire :

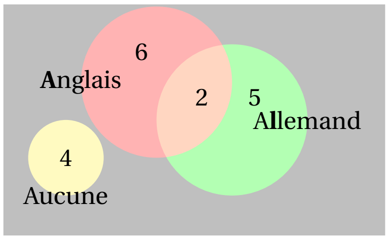
"Une classe est composée de 17 élèves"

$-$

Analyse :

- 8 élèves étudient l'anglais.
- 7 élèves étudient l'allemand.
- 8 élèves étudient l'anglais et l'allemand.

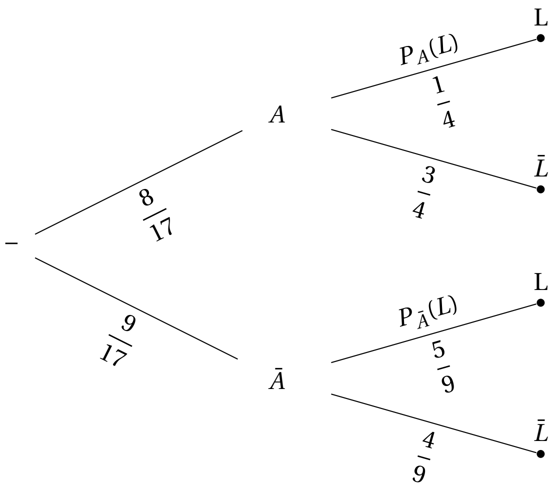
L'univers $\Omega = 17$



<u>Evénements :</u>

On sait qu'un élève étudie l'anglais. c'est quoi la probabilité qu'il étudie l'allemand ?

$P_A(L) = \dfrac{P(A \bigcap L)}{P(A)}$ $P_A(L) = \dfrac{\frac{2}{P(\Omega)}}{\frac{8}{p(\Omega)}}$ $P_A(L) = \dfrac{1}{4}$



$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P_{\bar{A}}(L) = \dfrac{P(L \bigcap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{5}{9}$

$P_{\bar{A}}(\bar{L}) = P(Aucune) = \dfrac{4}{9}$

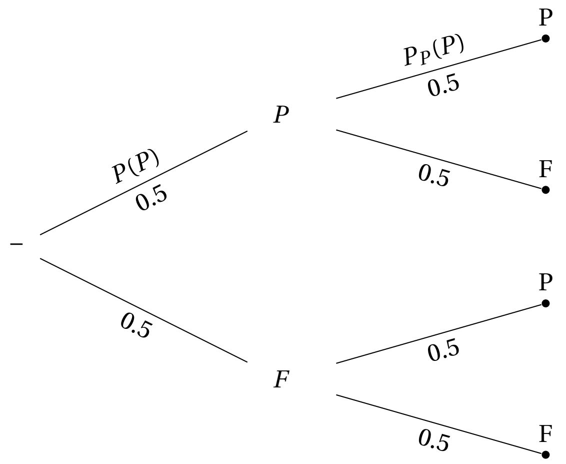
En probabilité, on parle de 2 événements indépendants quand la probabilité d'un événement L sachant l'autre événement A est égal a la probabilité de l'événement.

$P_A(L) = P(L)$

Or Dans cette situation les 2 événements ne sont pas indépendants.

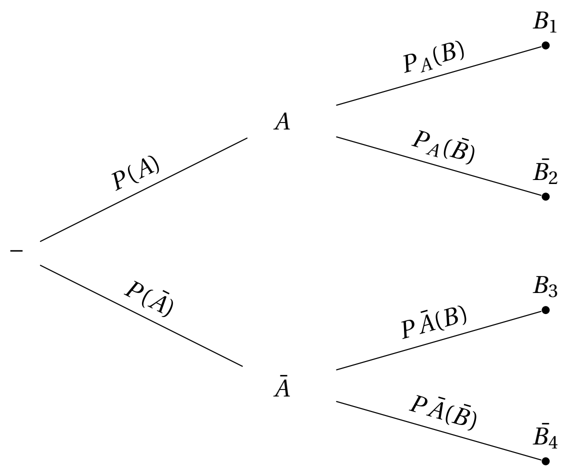
$P_A(L) = \dfrac{1}{4}$ et $P(L) = \dfrac{7}{17}$

> **Pour démontrer l'indépendance entre 2 événement**
> Il faut que : le premier choix $[A\ ou\ \bar{A}]$ n'est pas d'influence sur le deuxième choix $[L\ ou\ \bar{L}]$.
> C'est a dire que :
> la probabilité $[L$ sachant A ici $1/4]$ doit être la même que la $[L$ sachant $\bar{A}$ bar ici $5/9]$.
> Cela veut dire que la réalisation de L n'a aucune relation avec la précédente $A\ ou\ \bar{A}$
> Ici $A\ et\ L$ ne sont pas indépendants.



Expérience aléatoire
"Lancer de dés"
$P(P) \ = \ P_P(P)$
$P(F) \ = \ F_F(F)$

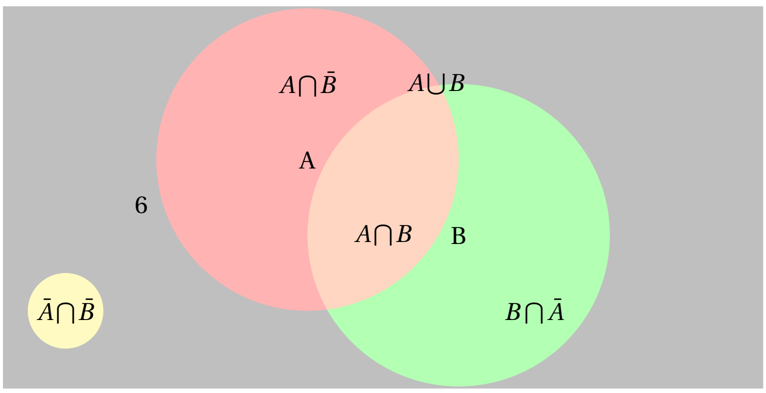
Les deux événements
avoir pile ou avoir face
sont **indépendants**.



Expérience aléatoire
"___"
$\bigcap$ veut dire que l'on réalise
a la fois A et B.

1 - $P(A \bigcap B) = P_A(B)xP(A)$
2 - $P(\bar{B} \bigcap A) = P_A(B)xP(A)$
3 - $P(B \bigcap \bar{A}) = P_A(B)xP(A)$
4 - $P(\bar{B} \bigcap \bar{A}) = P_A(B)xP(A)$

Si deux événement A et B sont indépendants
Alors : $P(A \bigcap B) \ = \ P(B).P(A)$ Ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$



$P(B) \quad = \quad P(B \bigcap \bar{A}) \ + \ P(B \bigcap A)$
$P(B) = P_A(B).P()\bar{A} + P_A(B).P(A)$

Théorie des probabilités totales
$P(B) = P_A(B).P(\bar{A}) + P_A(B).P(A)$

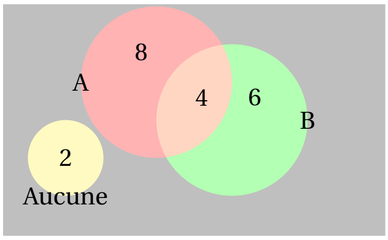
10 Un tableau à double entrées

Expérience aléatoire :
"Sur un échantillon composée de 20 élèves"

**"Est-ce qu'il aime
le cour d'anglais
ou bien le cours de biologie".**

L'analyse :
- 8 élèves aiment l'anglais.
- 6 élèves aiments la biologie.
- 4 élèves aiment les deux cours.
- 2 élèves restent

L'univers $\Omega = 20$



$P(A) = \frac{12}{20}$

$P(B) = \frac{20}{10} = \frac{1}{2}$

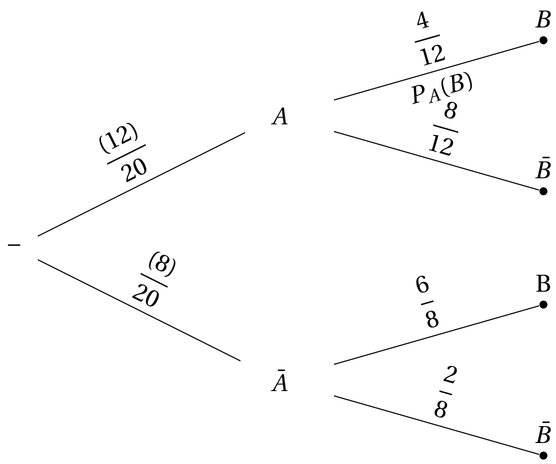
$P(A \bigcap B = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ Intersection des colonnes A et B.

$P(A \bigcup B) = \frac{18}{20}$

$P(\bar{A} \bigcap \bar{B}) = \frac{2}{20}$ ou $P(\bar{A} \bigcap \bar{B}) = 1 - P(A \bigcup B)$

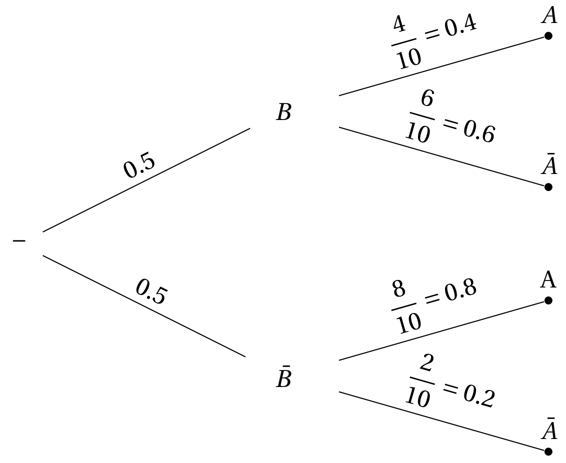
A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20

A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



Quand on écrit $P_A(B)$ qui se lit $P(B)$ sachant que A est réalisé.
Alors on se place sur la ligne de A et regarde les intersection avec B ou $\bar{B}$.

A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



11 Loi binomiale

Pré-requis :

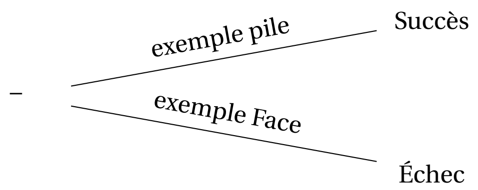
Pour appliquer **la loi binomiale** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :
- être du type "épreuve de Bernoulli" ;
- pouvoir caractériser les paramètres espérance, variance et écart type ;
- être représentée par un arbre de probabilité pondéré.

L'analyse :

- **A**] L'épreuve de Bernoulli

  Dans une épreuve de Bernoulli seuls deux issues sont possible : **Succès** ou **Échec**.

  Exemple :



- **B**] La Loi de Bernoulli

x_i	1	0
$P(x = x_i)$	P	$(1-P)$

Légende : 1 = succès et 0 = échec.

L'espérance de X	$P \Rightarrow E(X) = P$
La variance de P	$P(1-P) \Rightarrow V(X) = P(1-P)$
L'écart type de X	$\sqrt{P(1-P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1-P)}$

- **C**] Le schéma de Bernoulli

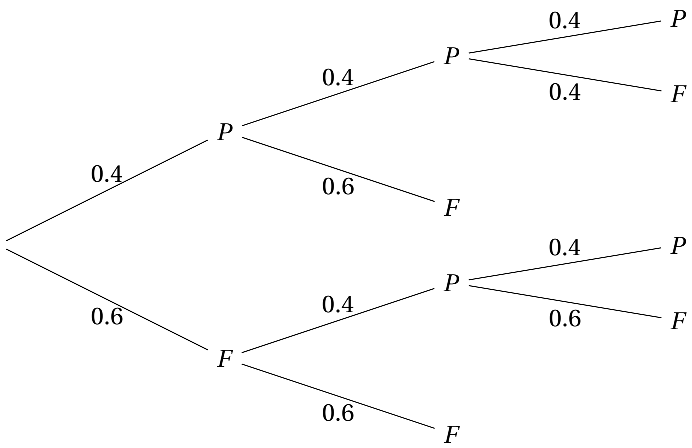
  Note sur les expériences :

  - On peut continuer ainsi jusqu'à le nième expérience.

  - Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

  Exemple :

  Énoncé [. . .]



La loi binomiale

- **A**] Prenons l'exemple du schéma de Bernoulli précédent.
  Si les n expériences sont indépendantes Alors leurs probabilités sont les mêmes.$P = 0.4$ et $F = 0.6$.

- **B**] Lancés de dé
  - Pour avoir 3 fois Pile : $P(X=3) = 0.4 * 0.4 * 0.4 = 0.4^3$
  - Pour avoir 2 fois Pile : $P(X=2) = (0.4 * 0.6 * 0.4 = 0.4) + (0.6 * 0.4 * 0.4) = 3 * (0.4^2 * 0.6)$
  - Pour avoir 1 fois Pile : $P(X=1) = 3(0.4 * 0.6^2)$
  - Pour avoir 0 fois Pile : $P(X=0) = 0.6^3$

- **C**] Pour n=3

  $P(X=2) = 3 * 0.4^2 * 0.6^{(3-2)}$

  Note sur l'expérience :

  - Le 3 correspond au nombre deux fois que l'on peut avoir deux piles $X = 2$
  - Ce 3 peut s'écrire aussi $\complement_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!}$

$$P(X=k) = \complement_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$$

12 Loi géométrique

WP-CMS

[02 :24 :24]

Pré-requis :

Pour appliquer **la loi géométrique** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :

- répondre aux caractéristique d'une "épreuve de Bernoulli" ;

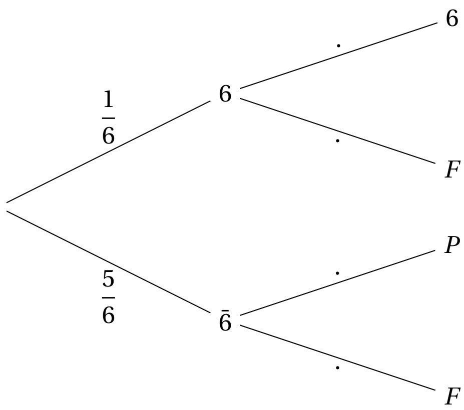
- de répéter continuellement les épreuves jusqu'à obtenir l'objectif.

L'analyse :

- **A**]Exemple

  On lance un dé continuellement jusqu'à obtenir un six.

  Soit X le nombre de lancers nécessaire.



- **B**] La loi géométrique

  - On note X le nombre de fois que l'on lance cette épreuve de Bernoulli.

    La variable aléatoire X va suivre une loi géométrique G de probabilité $\frac{1}{6}$.

    $X \sim G(\frac{1}{6})$

  - Le calcul de la **probabilité** avec $k_{1\rightarrow} + \infty$.

    $P(X = k) = \left[(1-P)^{k-1} * P\right] \Rightarrow$ Note importante : $(1-P)$ se lit ne pas avoir 6 et P avoir 6.

  - Calculer **la moyenne** de la variable aléatoire :

    $E(X) = \frac{1}{P} = 6$

  - Calculer **la variance** de X

    $V(X) = \frac{1-P}{P^2} = 30$

- **C**] Suite

- "Obtenir un 6 au deuxième lancé"
  $P(X=2) = (1-\frac{1}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0,138$
- "Obtenir 6 avant le troisième lancer inclus"
  $P(X \leqslant 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
  $P(X=1) = (\frac{5}{6})^{1-1} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
  $P(X=2) = (\frac{5}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
  $P(X=3) = (\frac{5}{6})^{3-1} * \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$
  La probabilité est égale à : $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}$

Loi géométrique : $X \sim G(\frac{1}{6})$
Probabilité : $P(X=k) = \left[(1-P)^{k-1} * P\right]$
Espérance (ou moyenne) $E(X) = \frac{1}{P} = 6$
La variance : $V(X) = \frac{1-P}{P^2} = 30$

13 Fonctions une loi normal

[02 :37 :58]

Dans une loi **binomiale**

- $X \in \aleph$ est une variable **discrète**.
- $X = 0, 1, 2..., n$
- $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k P^k * (1 - P)^{n-k}$

Si n devient grand, Alors on passe sur une loi normale.

Dans une loi **normale**

- $X \in \Re$ est une variable **continue**.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- μ = Moyenne de X ici représenté par m
  σ = Écart type
  σ^2 = Variance

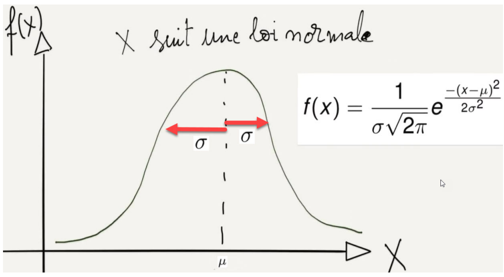


Figure 1 – *Loinormale*

la loi normale centrale réduite

Si une lois est reconnue normale Alors elle peut être ramenée à une loi centrale réduite grâce au changement de variable suivant :

> Si X suit la loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
> Alors On remplace X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
> Car $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [0 étant la moyenne et l'origine des axes de la courbe]

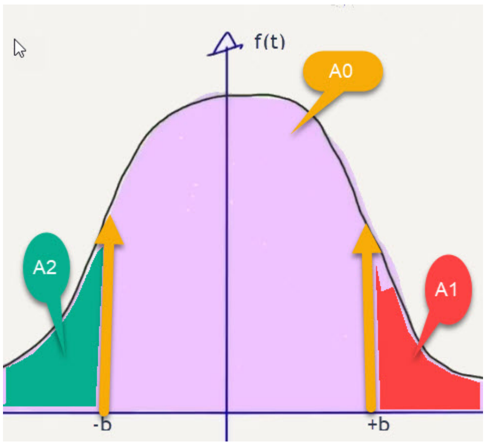


FIGURE 2 – $Loi\ normale\ \mu = 0$

Légende :

- Pour $A1 \Rightarrow P(T \geqslant +b)$
- Pour $A2 \Rightarrow P(T \leqslant +b)$
- Pour $A0 \Rightarrow P = 1$

Propriété très importants

Utilisation de la table des probabilités

Dans la table on ne peut calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^+)$

Utilisation de la table des probabilités

Pour utiliser cette table on doit souvent avoir recours aux propriétés suivantes :

$P(T \geqslant -a) = P(T \leqslant +a$
$P(T \geqslant +b \Leftrightarrow P = 1 - P(T < b)$

Procédure

1. Paramétrage de la Loi normal (récupération des données de l'énoncé).
   Si la **moyenne** $\mu = m$ et l'**écart type** $\sigma = e$ Alors $\Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(m, e)$.
2. Traduction mathématique de l'événement "—[...]—."
3. On remplace la variable X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.
4. On adapte l'expression de la probabilité à la forme $P(T \leqslant +b)$.
5. On exploite table de probabilité sur la loi normale centrée.