WP-CMS

Mathématiques

Probabilités

Solutions exercices

Numéro 01

$\longmapsto$ *Documentderéférence*

$\longmapsto$ *Mémo − vecteurs, droitesetplandansl′espace*

$\longmapsto$ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

$\longmapsto$ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

1 Plan du document

2 Dénombrement

2.1 Exercice 01

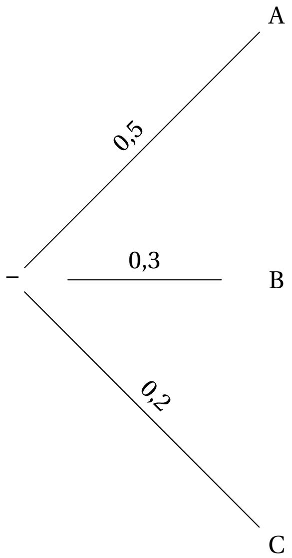
Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron.
On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événement suivants :
A : "le bonbon est à la menthe" ;
B : "le bonbon est à l'orange" ;
C : "le bonbon est au citron".

1. Déterminer les probabilités $P(A)$ puis $P(B)$ et $P(C)$.
2. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

Solution - 01

- **A]** $\Omega = 10$ et $Card(A) = 2$ Donc $P(A) = \dfrac{2}{10}$
- **B]** $\Omega = 10$ et $Card(B) = 3$ Donc $P(B) = \dfrac{3}{10}$
- **C]** $\Omega = 10$ et $Card(C) = 5$ Donc $P(C) = \dfrac{5}{10}$

Solution - 02

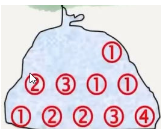


La somme des probabilité est égale à 1.

2.2 Exercice 02

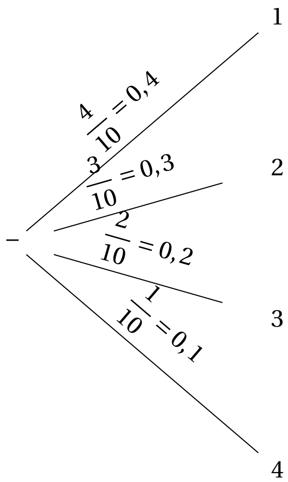
WP-CMS

Un sac opaque contient les boules représentées ci-dessous ; un nombre de points est indiqué sur chacune d'elles.
On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.



1. Dessiner l'arbre des possibles par le probabilités données sous forme fractionnaire et décimale.
2. Calculer la probabilité de l'événement A ; "obtenir au moins deux points" .

Solution - 01



Solution - 02

- **A]** L'événement A est réalisé si l'on tire une boule 2,3 ou 4.
  $P(A) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6$
- **B]** Ou en prenant l'événement contraire $\bar{A}$ et la propriété $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
  $P(\bar{A}) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

Ici on utilise la propriété $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

2.3 Exercice 03

Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu.

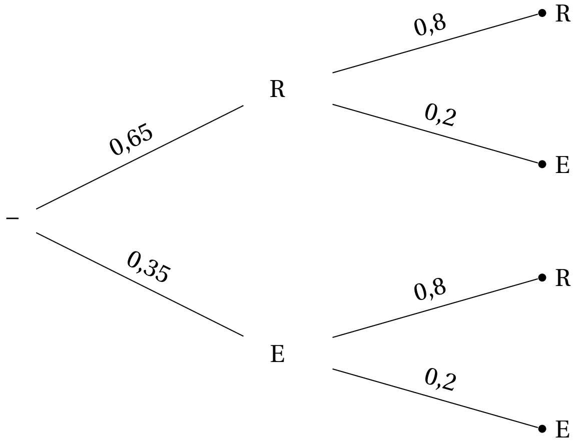
Gwladys réussit sa première basse de service dans 65% des cas.

Quand elle échoue, elle réussit la seconde dans 80% des cas.

1. Quelle est la probabilité pour qu'elle commette une double faute?

Solution - 01

Légende : R=réussite E=Échec



Pour commettre une double faute, il faut par le chemin E_1 et E_2.

C'est a dire par le produit des probabilités sur le chemin.

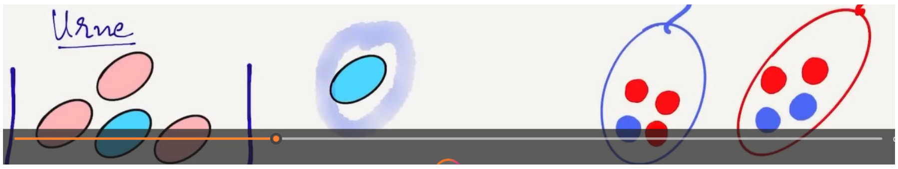
$P(Gwladys) = 0.35 * 0,2 = 0,7$

Gwladys à 7% de malchance de commettre une double faute.

2.4 Exercice 04

Une urne contient 5 boules indicernables au toucher : deux bleues "B" et trois rouge "R".
On dispose également de deux sacs contenant des jetons :
- l'un est bleu et contient un jeton bleu "b" et trois jetons rouges "r",
- l'autre est rouge et contient deux jeton bleu "b" et deux jetons rouges "r",
On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

1. Combien y a-t-il d'issues possible?.
2. A l'aide d'un arbre pondérée, déterminée la probabilité de chacune de ses issues.
3. Déterminer la probabilité d'événement A : "la boule et le jeton extraits sont de la même couleur".

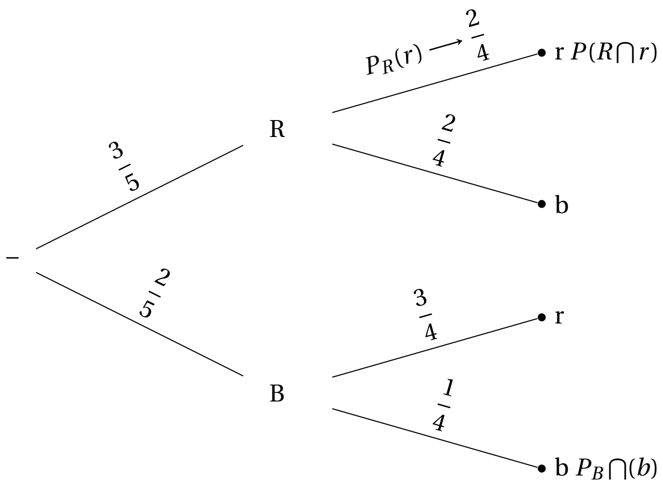


Solution - 01

- **A]** Quand on extrait de l'urne. Deux possibilités : soit la boule est rouge R soit la boule est bleu B
- **B]** Quand on extrait d'un sac. Deux possibilités : soit la jeton est rouge r soit la jeton est bleu b
- **C]** L'ensemble des résultats donne 4 issues possible.

Solution - 02

Légende : R=réussite E=Échec



Solution - 03

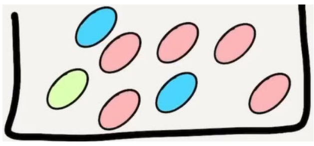
- **A]** $P_R\bigcap(r) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = 0,3$
- **B]** $P_B\bigcap(b) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = 0,1$
- **C]** $\Rightarrow P_R\bigcap(r)\bigcup P_B\bigcap(b) = 0,3 + 0,1 = 0,4$

2.5 Exercice 05

Dans une urne il y a cinq boules rouge (R), deux boules bleu (B) et une boule verte, indiscernable au toucher.
L'expérience aléatoire est de tirer successivement e t sans remise de boules.
On veut déterminer la probabilité de "tirer deux boules de la même couleur".

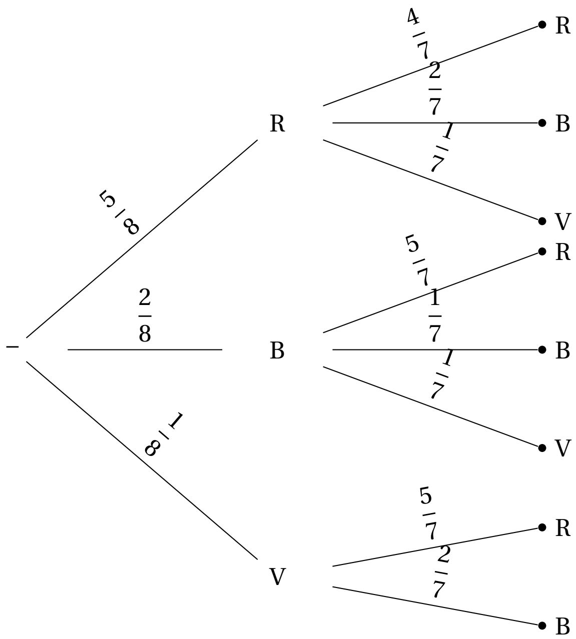
1. Représenter sur un arbre tous les possibles en indiquant sur leurs branches correspondantes la probabilité de tirer deux boules de chaque tirage lors des deux tirages..
2. En déduire la probabilité d'avoir :
   - le couple (R,R),
   - le couple (B,B),
   - le couple (V,V).

3. En déduire la probabilité de "tirer deux boules de la même couleur".



Solution - 01

Légende : R=rouge B=Bleu et V=vert



Solution - 02

- **A]** $P(R,R) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = 0,357$
- **B]** $P(B,B) = \frac{2}{8} * \frac{1}{7} = 0,035$
- **C]** $P(V,V) = \frac{1}{8} * \frac{0}{7} = 0$

- **A]** $P((R_1 \bigcap R_2) \bigcup (B_1 \bigcap B_2 \bigcup (V_1 \bigcap V_2)) = 0,357 + 0,035 = 0,392$
- **B]** $P_{R_1}(R_2) * P(R_1) = \frac{4}{7} * \frac{5}{8} = 0,357$
- **C]** $P_{B_1}(B_2) * P(B_1) = \frac{1}{7} * \frac{2}{8} = 0,035$

$\Rightarrow$ Résultat 1

$\Rightarrow$ Résultat 2

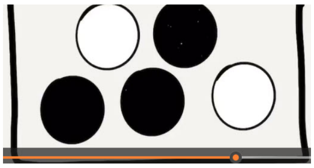
2.6 Exercice 06

Dans une urne se trouvent 2 boules blanches et 3 boules noires.

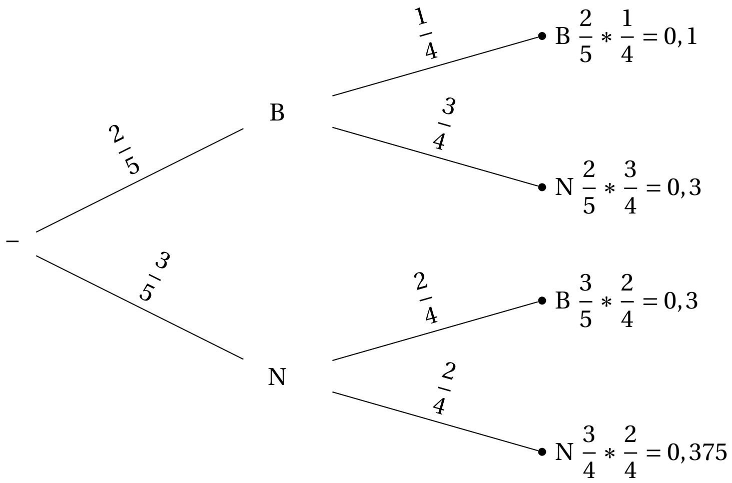
On tire successivement deux boules sans remise.

Calculer et comparer les probabilité des deux événement suivants :

1. "Tirer deux boules de la même couleur".
2. "Tirer deux boules de couleur différentes".



Solution - 01



"Tirer deux boules de la même couleur" : 0,1+0,375=0,475

Solution - 02

"Tirer deux boules de couleur différentes" :0,3+0,3=0,6

2.7 Exercice 07

Un sportif est choisi au hasard dans un groupe pour subir un contrôle antidopage.

On appelle T l'événement : "Le contrôle est positif". D'apres les statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$

On appelle D l'événement "Le coureur est dopé".

Le contrôle antidopage n'étant pas fiable à 100%, on sait que :

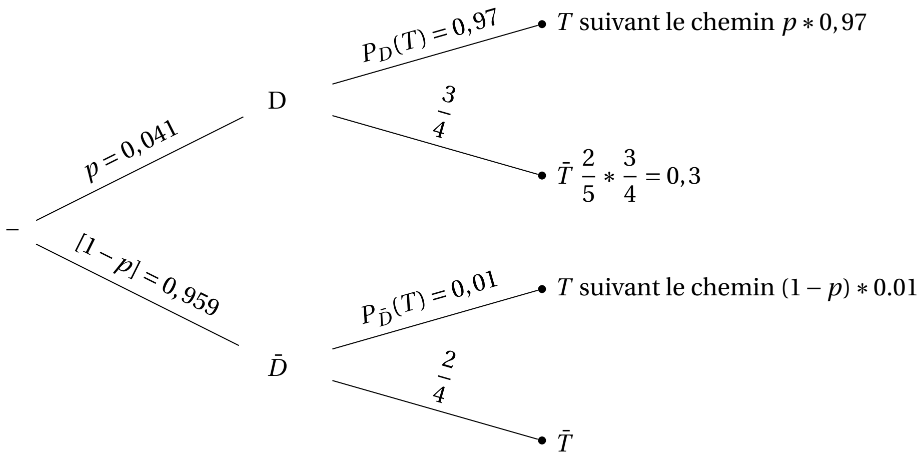
Si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97% des cas.

Si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

1. On note p la probabilité de D. Déterminer p à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Un coureur à un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?.

Solution - 01



- $P(T) = 0,05 \Rightarrow 0,97p + 0,01(1 - p) = 0,05 \Rightarrow p = \dfrac{0,04}{0,96} = 0,041$

Note : Pour construire l'arbre il y a deux possibilités :

Soit $T\bar{T}$ suivi de $D\bar{D}$

Soit $D\bar{D}$ suivi de $T\bar{T}$

En lisant attentivement l'énoncé on s'aperçoit que le deuxième choix est plus évident que le premier.

Solution - 02

- **A]** Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé $P(\bar{D})$.
  Avec la condition Un coureur à un contrôle positif $P_T(\bar{D})$.

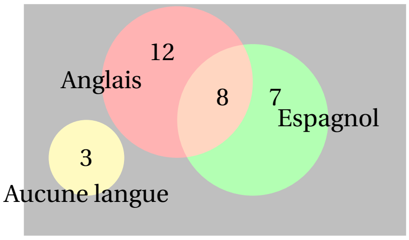
- **B]** $P_T(\bar{D}) = \dfrac{P(\bar{D} \bigcap T)}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = \dfrac{P(0,959 * 0,01)}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = 0,191$

2.8 Exercice 08

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. De plus, 8 étudient les deux langues.
Pour un élève donné, on note :
A l'événement : "l'élève étudie l'anglais" et E l'événement : "l'élève étudie l'espagnol".
On choisi un élève au hasard dan la classe.

1. Représenter les données dans un diagramme de Venn.
2. Que représente l'événement $A \bigcap E$? Donner sa probabilité.
3. Que représente l'événement $A \bigcup E$? Donner sa probabilité..
4. Quel est la probabilité que l'élève choisi n'apprenne ni l'anglais ni l'espagnol ?
5. Quel est l'événement contraire de A ? Calculer sa probabilité.

Solution - 01



Solution - 02

- **A]** $A \bigcap E$ représente les 8 élèves qui étudient l'anglais et l'espagnol.
- **B]** $A \bigcap E = \dfrac{8}{30} \Omega = 30$

Solution - 03

- **A]** $A \bigcup E$ représente les 27 élèves qui étudient l'anglais et/ou l'espagnol.
- **B]** $A \bigcup E = \dfrac{27}{30} \Omega = 30$
- **C]** Ou $P(A) + P(E) - P(A \bigcap E) = \dfrac{20}{30} + \dfrac{15}{30} - \dfrac{8}{30}$

Solution - 04

- **A]** $P(\bar{A} \bigcap \bar{E}) = \dfrac{3}{30}$ avec $\bar{A}$ pas d'anglais et $\bar{E}$ pas d'espagnol.
- **B]** $P(\bar{A} \bigcap \bar{E}) = 1 - P(A \bigcup E)$

Solution - 05

- **A]** $P(\bar{A}) = \dfrac{10}{30}$
- **B]** Ou $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{20}{30} = \dfrac{10}{30}$

3 Variable aléatoire Loi de probabilité

3.1 Exercice 09 :

Un joueur lance un dé équilibré.

Si le numéro obtenu est impair, le joueur gagne 8€.

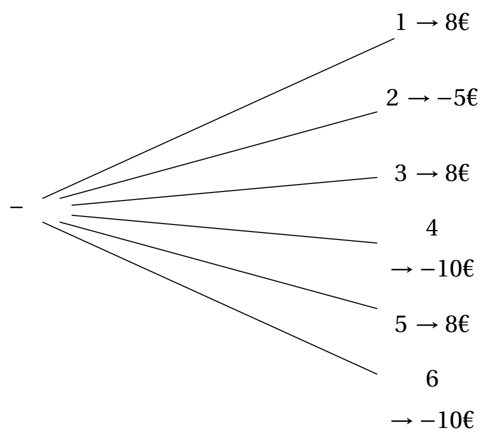
Si le numéro obtenu est 2, il perd 5€. Sinon il perd 10€

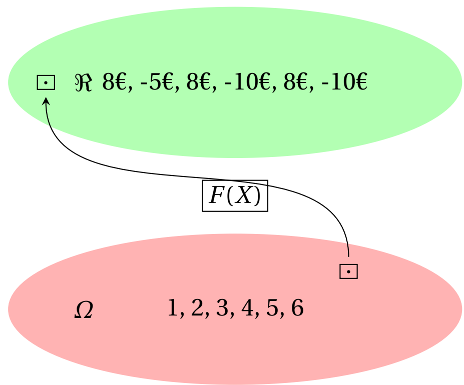
On appelle X la variable aléatoire égale au gain ou perte du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution - 01

Pour bien comprendre la variable aléatoire, il faut identifier l'univers Ω





Une variable aléatoire est une fonction qui associe à chaque issue de l'univers Ω un réel.

- La loi de probabilité :

$P(x=8)=\frac{3}{6}$; $P(x=-5)=\frac{1}{6}$ et $P(x=-10)=\frac{2}{6}$

x_i	-10	-5	8	Σ
$P(x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

3.2 Exercice 10

On lance deux dés équilibrés.
On s'intéresse à la variable aléatoire X égale à l'écart entre les deux résultats obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance de X.

Solution - 01

- **A]** Déterminer l'univers Ω
  On peut utiliser un diagramme de Venn, un arbre pondéré ou un tableau à double entrées. Ici on choisi la tableau.

$1er\ dé$ / $2éme\ dé$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	54	4	3	2	1	0

- **B]**Loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	Σ
$P(x=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

Solution - 01

- **A]** Espérance de X $E(X) = \sum_{i=0}^{5} X_i P_i$
- **B]** $= 0 * \frac{6}{36} + 0 * \frac{6}{36} + 1 * \frac{10}{36} + 2 * \frac{8}{36} + 3 * \frac{6}{36} + 4 * \frac{4}{36} + 5 * \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = 1,94$

4 Loi binomiale

4.1 Exercice 11 :

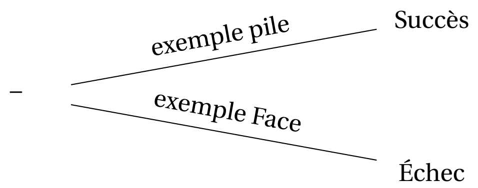
Énoncé de l'exercice.

1. Question 1.
2. Question 2.
3. Question 3.

<u>**Solution - 01**</u>

Pré-requis pour avoir une loi binomiale il faut :

- **A**] Une épreuve de Bernoulli ⇒ Deux issues possible.



- **B**] Une loi de Bernoulli

x_i	1	0
$P(x = x_i)$	P	$(1 - P)$

<u>Légende :</u> 1 = succès et 0 = échec.

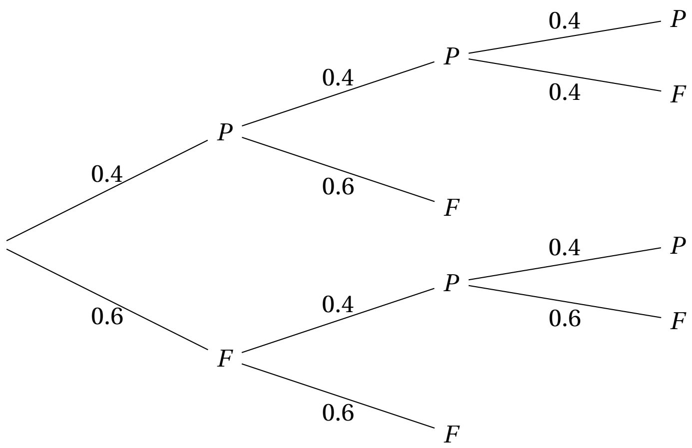
Pour cette loi :

- **l'espérance** de X est égale à $P \Rightarrow E(X) = P$

- **La variance** de P est $P(1-P) \Rightarrow V(X) = P(1-P)$

- **L'écart type** de X est $\sqrt{P(1-P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1-P)}$

- **C**] Le schéma de Bernoulli



Note :

- On peut continuer ainsi jusqu'à le nième expérience .
- Les expérience doivent être indépendante. C'est a dire qu'à la fin de la première expérience on doit toujours avoir une chance d'avoir pile ou face.

Solution - 02

La loi binomiale :

- **A**] Prenons le schéma de Bernoulli précédent. Comme les n expériences sont indépendantes alors leurs probabilités sont les mêmes.$P = 0.4$ et $F = 0.6$.

- **B**]
  - Pour avoir 3 fois Pile : $P(X=3) = 0.4 * 0.4 * 0.4 = 0.4^3$
  - Pour avoir 2 fois Pile : $P(X=2) = (0.4 * 0.6 * 0.4 = 0.4) + (0.6 * 0.4 * 0.4) = 3 * (0.4^2 * 0.6)$
  - Pour avoir 1 fois Pile : $P(X=1) = 3(0.4 * 0.6^2)$
  - Pour avoir 0 fois Pile : $P(X=0) = 0.6^3$

- **C**] Pour n=3
  $P(X=2) = 3 * 0.4^2 * 0.6^{(3-2)}$
  Le 3 correspond au nombre deux fois que l'on peut avoir deux piles $X = 2$
  Ce 3 peut s'écrire aussi $\mathbb{C}_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!}$

$$P(X=k) = \mathbb{C}_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$$

4.2 Exercice 12

Un commercial doit rendre visite à 5 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ces clients et que sa valeur est de 0.2. On admet que la décision de chaque clients est indépendante des autres.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

1. Quelle loi suit X ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité pour le commercial d'obtenir exactement trois commandes.
3. Quelle est la probabilité pour le commercial de n'obtenir aucune commandes.
4. Le commercial a-t-il plus de chance sur deux d'obtenir au moins deux commandes .

Solution - 01

- **A]** X suit une loi binomial car elles suit :
  1) une répétition d'une même épreuve aléatoire [rendre visite à 5 clients]
  2) chaque épreuve est indépendante des précédentes [la décision de chaque clients est indépendante des autres.]
  3) La probabilité de chaque épreuve est la même $P = 0.2$
  Les conditions sont réunies pour appliquer : $P(X = k) = \complement_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$

- **B]** Les paramètres de cette loi sont :
  1) $n = 5$ [visite de 5 clients]
  2) $P = 0.2$ [Probabilité de réussir]
  La loi binomiale est $X \sim \beta(5, 0.2)$

- **C]** Argumentaire [...]

Solution - 02

- **A]** $P(X = 3) = \complement_5^3\, 0.2^3\, (1-0.2)^2$
- **B]** $\frac{5!}{3!2!} * 0.2^3\, (1-0.2)^2 = 0.0512 \Rightarrow 5,12\%$

Solution - 03

- **A]** $P(X = 0) = \complement_5^0\, 0.2^0\, (1-0.2)^5$
- **B]** $P(X = 0) = 0.8^5 = 0.32768 \Rightarrow 3,27\%$

Solution - 04

- **A]** $P(X \geqslant 2_{2,3,4,5}) \Rightarrow P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
  Pour plus efficacité on prend l'inverse c'est a dire l'événement contraire.

- **B]** $P(X \geqslant 1)$
  $P(X = 0) = 0,33$ [Déjas calculé]
  $P(X = 1) = \complement_5^1\, 0.2^1\, 0.8^4$
  $P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!} * 0.2 * 0.8^4 = 0,41$
  $P(X \geqslant 1) = 0.33 + 0.41 = 0.74$

- **C]** $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$
  $P(X \geqslant 2) = 1 - 0,74 = 0,26 \Rightarrow 26\%$

4.3 Exercice 13

On lance une pièce de équilibrée plusieurs fois.

1. A-t-on plus de chance d'obtenir 3 "face" en 5 lancer que 4 "face" en 6 lancers?.

Solution - 01

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer la loi binomiales.

- **A]** $X \sim \beta(5; \frac{1}{2})$ [0.5 pour pile et o.5 pour face]
  $P(X=3) = \complement_5^3\, 0.5^3\, 0.5^2$
  $P(X=3) = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} * 0.5^5 = 0,31$
- **B]** $Y \sim \beta(6; \frac{1}{2})$
  $P(y=4) = \complement_6^4\, 0.5^4\, 0.5^2$
  $P(y=4) = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} * 0.5^6 = 0,23$
- **C]** $P(X=3) > P(y=4)$

4.4 Exercice 14

Dans les transports en commun, il y a 13% des voyageurs qui fraudent.
Chaque jour, 500 personnes sont contrôlées.
Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 500 personnes.
Supposons que X suit une loi binomiale

1. Déterminer les paramètres de la loi qui suit X.
2. Combien de personnes, en moyenne, vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?
3. Si le prix du ticket est de 250 €, quel doit être le prix de l'amende pour, qu'en moyenne, la société de transport ne perde pa d'argent avec les fraudeurs, sachant qu'il ya 5000 voyageurs par jour qui prennent les transports en commun.

Solution - 01

- **A**] $X \sim \beta(500; 0,13)$

Solution - 02

Rappel : La moyenne ou l'espérance

- **A**] $E(X) = n.P = 500 * 0,13 = 6,5$

Solution - 03

- **A**] Nombre de fraudeurs
  $5000 * 0,13 = 650$
- **B**] Montant de la fraude
  $650 * 2,50 = 1625$
- **C**]
  $1625 = X * 6,5 \Rightarrow X = \frac{1625}{6,5} = 250$

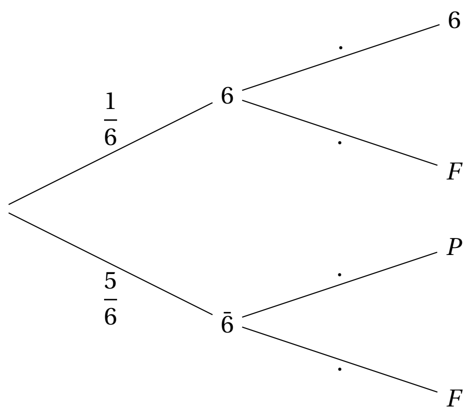
5 Loi géométrique

5.1 Exercice 15 :

On lance un dé continuellement jusqu'à obtenir un six.

1. Soit X le nombre de lancers nécessaire.

<u>**Solution - 01**</u>



<u>**Note :**</u> Ici on a une épreuve de Bernoulli que l'on va répéter autant de fois jusqu'à obtenir un 6.

- **A**] On note X le nombre de fois que l'on lance cette épreuve de Bernoulli.
  La variable aléatoire X va suivre une loi géométrique G de probabilité $\frac{1}{6}$.
  $X \sim G(\frac{1}{6})$
- **B**] Le calcul de la probabilité avec $k_{1\rightarrow} + \infty$.
  $P(X = k) = (1 - P)^{k-1} * P$ sel lit $(1 - P)$ ne pas avoir 6 et P avoir 6.

- **C**] Calculer la moyenne de la variable aléatoire :
  $E(X) = \frac{1}{P} = 6$

- **D**] Calculer la variance de X
  $V(X) = \frac{1-P}{P^2} = 30$
- **E**] "Obtenir un 6 au deuxième lancé"
  $P(X = 2) = (1 - \frac{1}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0,138$
- **F**] "Obtenir 6 avant le troisième lancer inclus"
  $P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
  $P(X = 1) = (\frac{5}{6})^{1-1} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
  $P(X = 2) = (\frac{5}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
  $P(X = 3) = (\frac{5}{6})^{3-1} * \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

La probabilité est égale à : $\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}$

6 La loi normale

6.1 Exercice 16 :

Dans une loi **binomiale** $X \in \aleph$ est une variable **discrète**.
$X = 0, 1, 2..., n$
$P(X = k) = C_n^k P^k * (1-P)^{n-k}$
Si n devient grand, Alors on passe sur une loi normale.

Dans une loi **normale** $X \in \Re$ est une variable **continue**. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

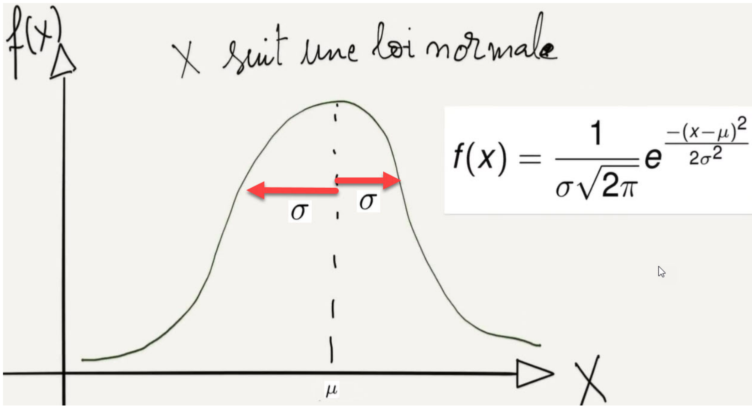


FIGURE 1 – *Loi normale*

μ = Moyenne de X ici représenté par m | σ = Écart type |σ^2 = Variance

Toutes lois normales peut être ramenée à une loi centrale réduite

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Si $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ Alors $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$

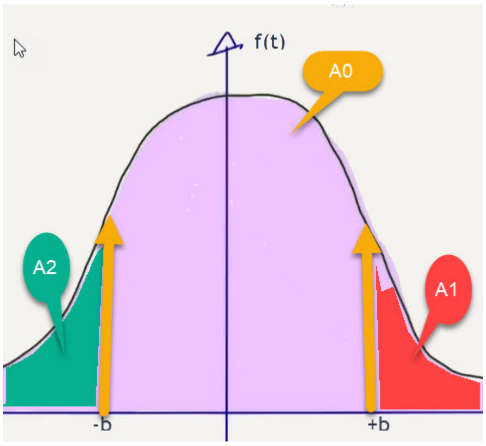


FIGURE 2 – $Loi\ normale\ \mu = 0$

- Pour $A1$ $P(T \geqslant +b$
- Pour $A2$ $P(T \leqslant +b$

On note : $A1$ $P(T \geqslant +b) = A2$ $P(T \leqslant +b)$

- Pour $A0$ $P = 1$ donc $A1$ $P(T \geqslant +b \Leftrightarrow P = 1 - P(T < b)$

6.2 Exercice 17 : Exo sur Loi normale

Selon une étude, le prix moyen d'une chambre d'hôtel à Paris est de 300 € par nuit.
Sachant que les prix des chambres soient normalement distribués avec un écart type de 80 €, calculer les probabilités suivantes :

1. La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte au moins 200 par nuit ?
2. La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte au plus 160 par nuit ?
3. La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte entre 250 € et 360 €u par nuit ?
4. Quel est le prix des 20% des chambres les plus chéres de Paris ?

Solution - 01

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 300$ et l'**écart type** de $sigma = 80 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(300, 80)$.
- **B]** Traduction mathématique de "coûte au moins 200 €." $P(X \geqslant 200)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-300}{80} \Rightarrow P(T \geqslant \dfrac{200-300}{80}) \Rightarrow P(T \geqslant -1,25)$
  Note importante : Dans la table on ne peur calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^{+})$
  Rappels de propriétés : $P(T \geqslant -1,25) = P(T \leqslant +1,25)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P(T \leqslant +1,25) = 0,89941 = 89,44\%$

La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte au moins 200€ par nuit est de 89, 44%.

Solution - 02

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 300$ et l'**écart type** de $sigma = 80 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(300, 80)$.
- **B]** Traduction mathématique de "coûte au plus 160 €." $P(X \leqslant 160)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-300}{80} \Rightarrow P(T \leqslant \dfrac{160-300}{80}) \Rightarrow P(T \leqslant -1,75)$
  Note importante : Dans la table on ne peur calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^{+})$
  Rappels de propriétés : $P(T \leqslant -1,75) = P(T \geqslant +1,75)$
  Pour pouvoir utiliser la table, il faut ici passer par l'événement contraire
  Soit $P(T \geqslant +1,75) = 1 - P(T \leqslant +1,75)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $1 - P(T \leqslant +1,75) = 0,9599 = 95,99\%$

La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte au plus 160 par nuit est de 95, 99%.

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 300$ et l'**écart type** de $sigma = 80 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(300, 80)$.

- **B]** Traduction mathématique de "coûte entre 250 € et 360 €." $P(250 \leqslant X \leqslant 360)$
  $P(X \leqslant 360)$ - $P(X \leqslant 250)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-300}{80}$
  $\Rightarrow P(T \leqslant \dfrac{360-300}{80})$ - $P(T \leqslant \dfrac{250-300}{80}) \Rightarrow P(T \leqslant 0,75)$ - $P(T \leqslant -0,625)$
  Note importante : Dans la table on ne peur calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^{+})$
  Pour pouvoir utiliser la table, il faut ici passer par l'événement contraire
  $P(T \leqslant 0,75)$ - $P(T \leqslant -0,625)$
  $P(T \leqslant 0,75)$
  $P(T \leqslant -0,625) = (1 - P(T \leqslant +0,625))$

- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P(T \leqslant 0,75) = 0,7734$
  $(1 - P(T \leqslant +0,625)) = 1 - 0,7324$
  $0,7734 - (1 - 0,7324) = 0,5058 = 50,58\%$

La probabilité qu'une chambre d'hôtel coûte entre 250 € et 360 €u par nuit est de $50,58\%$

Solution - 04

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 300$ et l'**écart type** de $sigma = 80 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(300, 80)$.

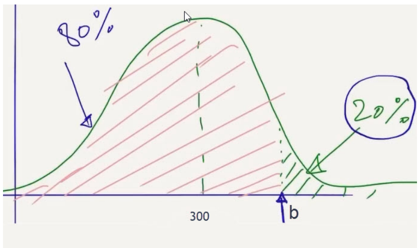


FIGURE 3 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilité$

- **B]** Traduction mathématique de "20% des chambres les plus chére ou 80% des chambres les moins chéres." [*afin d'utiliser la table*]
  $P(X \leqslant p) = 0,8$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-300}{80}$
  $P(T \leqslant \dfrac{p-300}{80}) = 0,8$

- **C**] Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  A l'intersection de 0,8 on lit 0,80 inter 0.04 $P(T \leqslant 0,84) = 0,8$ $\dfrac{p-300}{80} = 0,84 \Rightarrow Prix = 0,84 * 80 + 300 = 367,20$ €

Le prix des 20% des chambres les plus chéres de Paris est de $367,20$ €.

6.3 Exercice 18 : Exo sur Loi normale

WP-CMS

Dans un certain pays, la taille moyenne des hommes en âge d'accomplir leur service militaire est de 180 cm avec un écart type de 10 cm. Lors de la visite médicale de 10000 hommes sont contrôlés..

1. Estimer le nombre d'hommes mesurant entre 175 cm et 185 cm.
2. Si un homme mesure plus de 200 cm ou mo,s de 160 cm, il est dispensé de service militaire. Prévoir le nombre de dispensés.
3. Le ministère de la défense décide de dispenser 10% des hommes :5% car ils sont trop grands, et 5% car ils sont jugés trop petits. Déterminer la taille au-delà de laquelle un homme sera dispensé, et celle en deçà de laquelle il sera dispensé .

Solution - 01

Déterminer la variable aléatoire : "taille des hommes pour accomplir le service militaire."
Pour la variable aléatoire deux issus possibles : Soit Bon pour le service soit Réformé du service. Les 2 événements sont indépendants et cette épreuve est répétée 10000 fois alors on peut appliquer la loi normale.

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 180$ et l'**écart type** de $sigma = 10 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(180, 10)$.

- **B]** Traduction mathématique de "hommes mesurant entre 175 cm et 185 cm
  $P(175 \leqslant X \leqslant 180)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-180}{10}$
  $P(\dfrac{175-180}{10} \leqslant T \leqslant \dfrac{185-180}{10})$
  $P(-0,5 \leqslant T \leqslant +0,5) \Rightarrow P(T \leqslant +0,5)$ - $P(T \leqslant -0,5)$
  Note importante : Dans la table on ne peur calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^{+})$
  Pour pouvoir utiliser la table, il faut ici passer par l'événement contraire
  $P(T \leqslant +0,5)$
  $P(T \leqslant -0,5) \Rightarrow 1 - P(T \leqslant 0,5)$

- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P(+0,6915)$ - $1 - P(T \leqslant 0,5) \Rightarrow 0,695 - [1 - P(+0,6915)] \Rightarrow 0,383 = 38,3\%$

Le nombre d'hommes mesurant entre 175 cm et 185 cm est de $38,3\%$

Solution - 02

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 180$ et l'**écart type** de $sigma = 10 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(180, 10)$.

- **B]** Traduction mathématique de "les hommes mesurant plus de 200 cm et les hommes mesurant moins de 185 cm sont dispensés.
  $P(X \geqslant 200) + P(X \leqslant 160)$

Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
$P(X \geqslant \frac{200-180}{10}) + P(X \leqslant \frac{160-180}{10})$
$P(X \geqslant 2) + P(X \leqslant -2 \Rightarrow 2 * P(X \geqslant 2) \Rightarrow 2 * [1 - P(T \leqslant)2]$

- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $2 * [1 - P(T \leqslant)2] \Rightarrow 2 * [1 - 0,9772] \Rightarrow 4,56\%$

> 4,56% des hommes mesurant plus de 200 cm ou moins de 160 cm, sont dispensés du service militaire.
> C'est à dire 456 personnes sur 10000.

Solution - 03

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 180$ et l'**écart type** de $sigma = 10$

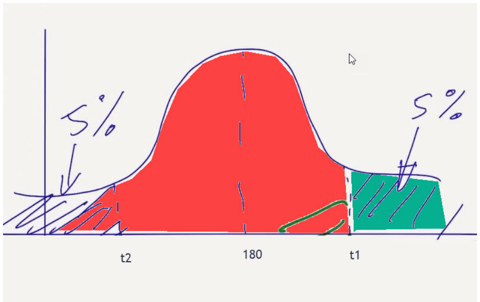


FIGURE 4 – $Justificatif du choix de la forme de la probabilité$

- **B]** Traduction mathématique de "—————".
  $P_{vert}(X \leqslant t2) = 5\%$
  $P_{rouge}(X \leqslant t1) = 95\%$
  Il suffit de calculer pour une seule taille et en déduire la seconde.
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $P_{rouge}(X \leqslant t1) = 95\%$
  $P_{rouge}(X \leqslant \frac{t1-180}{10}) = 95\%$
- **C]** Sur la table on recherche la probabilité 95% et on en déduit 1,6 et 0.04
  $P(T \leqslant 1,64) = 95\%$
  $\frac{t1-180}{10} = 1,64 \Rightarrow t1 = 1,64 * 10 + 180 = 196,4$ cm $\frac{t1-180}{10} = 1,64 \Rightarrow t2 = -1,64 * 10 + 180 = 163,6$ cm

> La taille au-delà de laquelle un homme sera dispensé 196,4 cm, et celle en deçà de laquelle il sera dispensé 163,6 cm.

6.4 Exercice 19 : Exo sur Loi normale

Pour être accepter à suivre des cours dans une université, il faut passer un teste d'anglais. Sachant que les notes obtenues soient normalement distribuées, avec une moyenne de 500 et un écart de 150.

1. Quel est le pourcentage de personnes qui ont une note comprise entre 450 et 550 ?.
2. Supposez que quelqu'un ait une note de 640. Quel est le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note ? Une moins bonne note ?
3. Si l'université n'admet pas les personnes qui ont une note inférieure à 480, quel est le pourcentage de personnes qui, ayant fait ce test, pourront être admise à l'université ?

Solution - 01

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

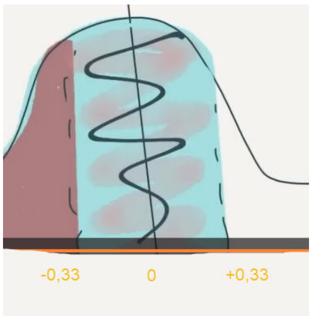


Figure 5 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilité$

- **B]** Traduction mathématique de pourcentage de personnes qui ont une note comprise entre 450 et 550
  $P(450 \leqslant X \leqslant 550)$
  $P(X \leqslant 550)$ - $P(X \leqslant 450)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-500}{150}$
  $P(T \leqslant \dfrac{550-500}{10})$ - $P(T \leqslant \dfrac{450-500}{10})$
  $P_{bleu}(T \leqslant 0,333)$ - $P_{rouge}(T \leqslant -0,333)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P(-0,33 \leqslant T \leqslant +0,33) \Rightarrow 2 * P(T \leqslant 0,33) - 1 \Rightarrow 2P(0,33) - 1 \Rightarrow 2 * 0,6293 - 1\ 0,2586$

Le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note est de Une moins bonne note ?

Solution - 02

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

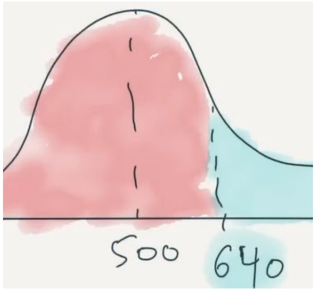


FIGURE 6 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilité$

- **B]** Traduction mathématique de "Meilleur note et une moins bonne note".
  $P_{bleu}(X \geqslant 640)$
  $P_{rouge}(X \leqslant 640)$
  On peut déduire une probabilité bleue si on connait la probabilité rouge Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $P(T \leqslant \dfrac{640-500}{150}) \Rightarrow P(T \leqslant 0,93)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P_{rouge}(T \leqslant 0,93) = 0,8238$ soit $82,38\%$
  $P_{bleue}(T \leqslant) = 1 - 0,8238$ soit $17,62\%$

> Le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note est de $17,62\%$ et d'une moins bonne note est de $82,38\%$?

Solution - 03

- **A]** La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

FIGURE 7 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilité$

- **B]** Traduction mathématique de pourcentage de personnes admise".
  $P_{hachuré}(X \leqslant 480)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $P_{hachuré}(T \leqslant \dfrac{480-500}{150})$

$P_{hachuré}(T \leqslant -0,133)$ On doit passer par la probabilité contraire pour utiliser la table
$1 - P(T \leqslant +0,133)$

- **C**] Sur la table on recherche la probabilité 95% et on en déduit $1 - P(T \leqslant +0,133) \Rightarrow 1 - 0,5517 = 0,4483$

Le pourcentage des élèves acceptés est de 55%

6.5 Exercice 20 : Loi Poisson

$p(k) = P(X = k =) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ avec λ la moyenne que represente un événement

Pour être accepter à suivre des cours dans une université, il faut passer un teste d'anglais. Sachant que les notes obtenues soient normalement distribuées, avec une moyenne de 500 et un écart de 150.

1. Quel est le pourcentage de personnes qui ont une note comprise entre 450 et 550?.
2. Supposez que quelqu'un ait une note de 640. Quel est le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note? Une moins bonne note?
3. Si l'université n'admet pas les personnes qui ont une note inférieure à 480, quel est le pourcentage de personnes qui, ayant fait ce test, pourront être admise à l'université?

Solution - 01

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

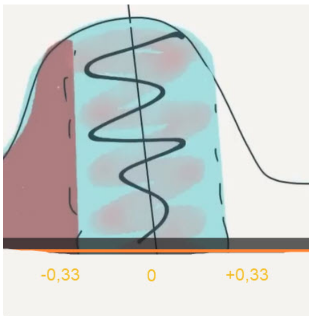


FIGURE 8 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilité$

- **B]** Traduction mathématique de pourcentage de personnes qui ont une note comprise entre 450 et 550
  $P(450 \leqslant X \leqslant 550)$
  $P(X \leqslant 550)$ - $P(X \leqslant 450)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $T = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 500}{150}$
  $P(T \leqslant \frac{550 - 500}{10})$ - $P(T \leqslant \frac{450 - 500}{10})$
  $P_{bleu}(T \leqslant 0,333)$ - $P_{rouge}(T \leqslant -0,333)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P(-0,33 \leqslant T \leqslant +0,33) \Rightarrow 2 * P(T \leqslant 0,33) - 1 \Rightarrow 2P(0,33) - 1 \Rightarrow 2 * 0,6293 - 1\ 0,2586$

Le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note est de Une moins bonne note?

Solution - 02

- **A]** Paramétrage de la Loi normal
  La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

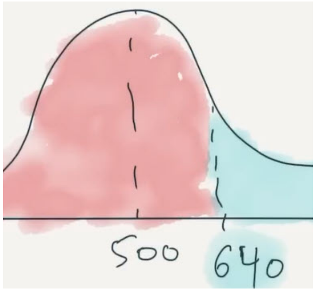


FIGURE 9 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilit$é

- **B]** Traduction mathématique de "Meilleur note et une moins bonne note".
  $P_{bleu}(X \geqslant 640)$
  $P_{rouge}(X \leqslant 640)$
  On peut déduire une probabilité bleue si on connait la probabilité rouge Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :
  $P(T \leqslant \dfrac{640-500}{150}) \Rightarrow P(T \leqslant 0,93)$
- **C]** Application de la table de probabilité sur la loi normale centrée
  $P_{rouge}(T \leqslant 0,93) = 0,8238$ soit $82,38\%$
  $P_{bleue}(T \leqslant) = 1 - 0,8238$ soit $17,62\%$

Le pourcentage de personnes qui ont une meilleure note est de 17,62% et d'une moins bonne note est de 82,38% ?

Solution - 03

- **A]** La **moyenne** est de $\mu = 500$ et l'**écart type** de $sigma = 150 \Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(500, 150)$.

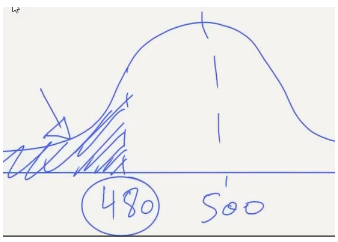


FIGURE 10 – $Justificatifduchoixdelaformedelaprobabilit$é

- **B]** Traduction mathématique de pourcentage de personnes admise".
  $P_{hachuré}(X \leqslant 480)$
  Pour appliquer la loi normal ventrée, on effectue un changement de variable :

$P_{hachuré}(T \leqslant \dfrac{480-500}{150})$
$P_{hachuré}(T \leqslant -0,133)$ On doit passer par la probabilité contraire pour utiliser la table
$1-P(T \leqslant +0,133)$

- **C**] Sur la table on recherche la probabilité 95% et on en déduit $1-P(T \leqslant +0,133) \Rightarrow 1-0,5517=0,4483$

Le pourcentage des élèves acceptés est de 55%