π

WP-CMS

Mathématiques

Probabilités

Fiche de synthèse

Numéro 01

$\longmapsto Documentderéférence$

$\longmapsto Mémo-vecteurs, droitesetplandansl'espace$

$\longmapsto Vecteurs-exercices-partie-2$

$\longmapsto Vecteurs-matrice-exemple-concret$

1 Plan du document

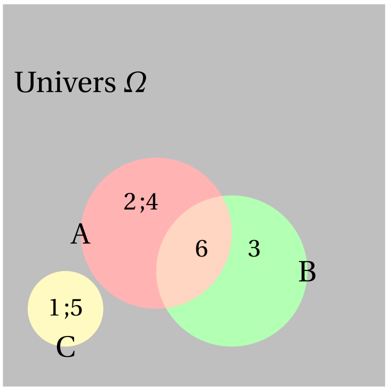
2 Fiche récapitulative

2.1 Le vocabulaire

- La **probabilité**, une estimation de la réalisation de quelque chose sur une échelle de 0 à 1.
- L'**expérience** (ou épreuve), processus pour aboutir sur une **issue** imprévisible parmi plusieurs possible.
- L'**événement** : exemple "*je veux obtenir un nombre pair*".
- l'**univers** Ω, ensembles des issues possibles.
- l'**union** $A \bigcup B$, est réalisée dés que "EVT" A ou B est réalisé.
- l'**intersection** $A \bigcap B$, est réalisée dés que "EVT" A et B sont réalisés dans la même expérience.
- Si l'événement A est *"obtenir un nombre pair"*
  Alors l'événement contraire de A noté $\bar{A}$ est l'événement *"obtenir un nombre impair"*.

2.2 Diagramme de Venn

"EVT" A "Obtenir un nombre pair".
"EVT" B "Obtenir un multiple de 3".
"EVT" C "Obtenir le résultat 1 ou 5".



L'univers Ω	1;2;3;4;5;6	Card $A = 6$	P(Ω)= 1
EVT de A	2;4;6	Card $A = 3$	P(A)= $\frac{3}{6}$
EVT de B	3;6	Card $B = 2$	P(B)= $\frac{2}{6}$
EVT de C	1;5	Card $C = 2$	P(C)= $\frac{2}{6}$

$P(A) + P(B = 1 \Rightarrow$ **Si on connait** $P(A)$ **Alors on peut en déduire** $P(B)$

Propriétés importantes : :

$A \bigcup \bar{A} = \Omega$ et $B \bigcup \bar{B} = \Omega$
$A \bigcap \bar{A} = \phi$ et $B \bigcap \bar{B} = \phi$

A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».
$A \bigcup B = \{2;3;4;5;6\}$; $A \bigcup B$ est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».
$A \bigcap B = \{2\}$; $A \bigcap B$ est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».

$$Card(A \bigcup B) = \frac{Card A}{Card \Omega} + \frac{Card B}{Card \Omega} - \frac{Card(A \bigcap B)}{Card \Omega}) \Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4$$

Donc $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ ou\ A\ se\ réalise}{Nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{Card A}{Card \Omega}$$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$ *L'avantage est de diminuer dans certain cas le nombre de calcul.*

2.3 Arbre de probabilité

Expérience aléatoire :

"Lancer de pièce de monnaie"

- EVT P "Obtenir Pile". - EVT F "Obtenir face".
- EVT PP "obtenir pile et pile"

le produit des chemins $P_1 0,5 * P_2 0,5 = 0,25$

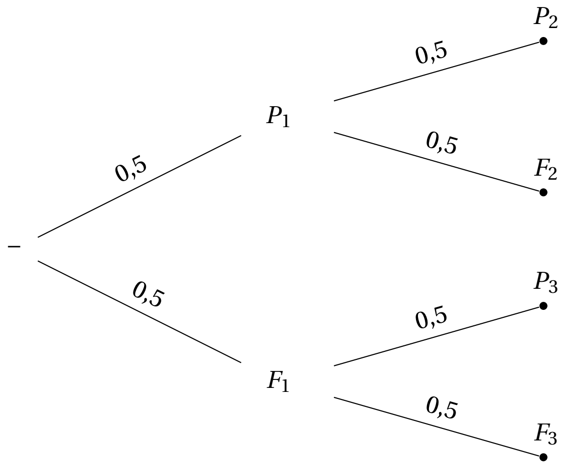
- EVT PP "obtenir face et face"

le produit des chemins $F_1 0,5 * F_3 0,5 = 0,25$

- EVT PP "obtenir pile et face ou face et pile"

le produit des chemins $2(0,5 * 0,5) = 0,5$

Si La probabilité recherchée est "obtenir pile et pile" et "obtenir face et face" Alors la probabilité est de !!!!!



2.4 Probabilité conditionnelle

Expérience Antidopage

- T "Le contrôle est positif"

avec $P(T) = 0,05$

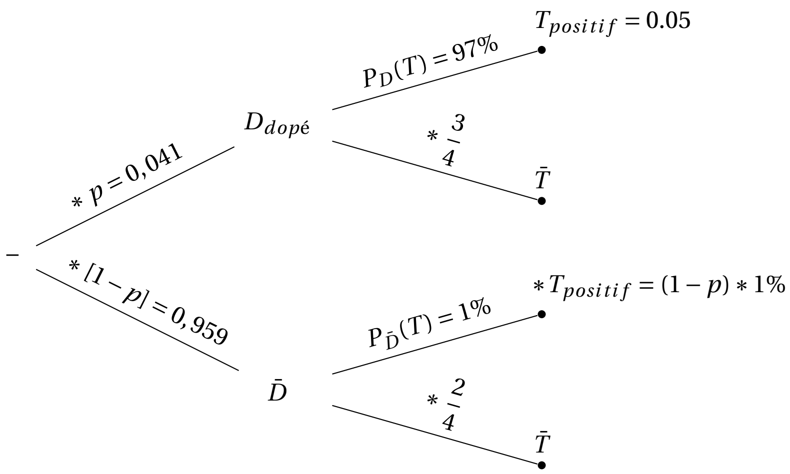
- D "Le coureur est dopé".
- Si dopé, contrôle positif dans 97% des cas
- Si pas dopé, contrôle positif dans 1% des cas

Note : $*$ Déduit par le calcul.

$P(T_{positif}) = 0,05$ [2 branches]

$\Rightarrow 0,97p + 0,01(1-p) = 0,05$

$\Rightarrow p = \dfrac{0,04}{0,96} = 0,041$



Un coureur à un contrôle positif.Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé $P(\bar{D})$.

Avec la condition Un coureur à un contrôle positif $P_T(\bar{D})$.

$$P_T(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \bigcap T)}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = \frac{P(0,959 * 0,01}{P(T)} \Rightarrow P_T(\bar{D}) = 0,191$$

- $P_T(\bar{D})$ est la probabilité de $\bar{D}$ [information conditionnelle] se réalise sachant que T [certifié] s'est réalisé.
- $P(\bar{D} \bigcap T$ est la probabilité que $\bar{D}$ et T se réalisent simultanément
- $P(\bar{D})$ est la probabilité que $\bar{D}$ se réalise.

2.5 Événements indépendants

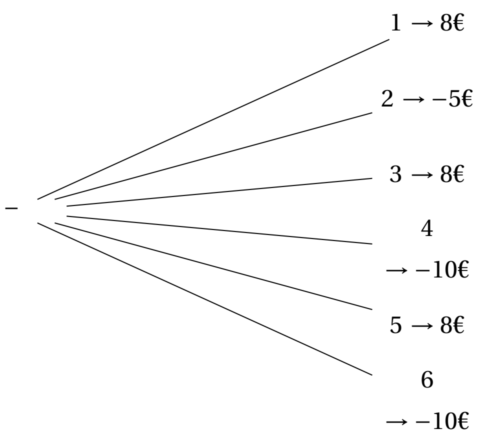
Note : Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

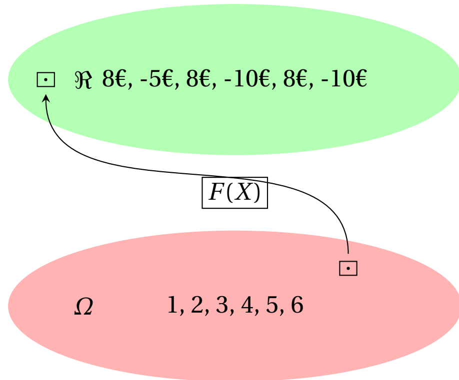
2.6 Variable aléatoire - Loi de probabilité

Expérience : Un joueur lance un dé équilibré.

Si le numéro obtenu est impair, le joueur gagne 8€.| Si le numéro obtenu est 2, il perd 5€. Sinon il perd 10€

On appelle X la variable aléatoire égale au gain ou perte du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X.





Une variable aléatoire est une fonction
qui associe à chaque issue de l'univers Ω un réel.

- La loi de probabilité : $P(x = -10\ ou\ -5\ ou\ 8)$

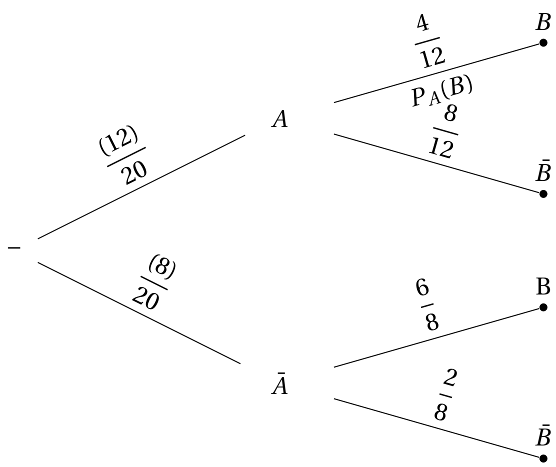
x_i	-10	-5	8	Σ
$P(x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

2.7 Tableau à double entrées

"Sur un échantillon composée de 20 élèves. $\Omega = 20$"

Les élèves aiment l'anglais [8], la biologie [6], les deux [4] et reste [2].

A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



2.8 Loi binomiale

Pré-requis :

Pour appliquer **la loi binomiale** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :

A) être du type "épreuve de Bernoulli". Seuls deux issues sont possible : **Succès** ou **Échec** [Pile ou Face].

x_i	1	0
$P(x = x_i)$	P	$(1-P)$

Légende : 1 = succès et 0 = échec.

B) pouvoir caractériser les paramètres espérance, variance et écart type ;

L'espérance de X	$P \Rightarrow E(X) = P$
La variance de P	$P(1-P) \Rightarrow V(X) = P(1-P)$
L'écart type de X	$\sqrt{P(1-P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1-P)}$

1] La répétition d'une même épreuve aléatoire (exemple : rendre visite à 5 clients)

2] La probabilité de chaque épreuve doit être la même (Exemple : $P = 0.2$)

3] Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

C) être représentée par un arbre de probabilité pondéré.

$$X \sim \mathscr{B}(n, P_{succes}) \Rightarrow P(X=k) = C_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$$

- k, Expérience exemple : nombre de commandes
- n, Événement exemple : nombre de visites
- P_{succes}^k, probabilité d'obtenir un succès.| - $(1-P)_{echec}$, probabilité de l'événement contraire

-$C_n^k = \dfrac{n!}{k! * (n-k)!}$

2.9 Loi géométrique

Expérience : lancer un dé continuellement	**Événement** : "jusqu'à obtenir un six."
Soit X le **nombre de lancers**. $X \sim G(\frac{1}{6})$.	X suit une loi géométrique G de probabilité $\frac{1}{6}$.

-**Probabilité** $P(X = k) = (1-P)^{k-1} * P$

se lit $(1-P)$ ne pas avoir 6 et P avoir 6.

-Moyenne : $E(X) = \dfrac{1}{P} = 6$

-Variance : $V(X) = \dfrac{1-P}{P^2} = 30$ -"Obtenir 6 avant le troisième lancer inclus"

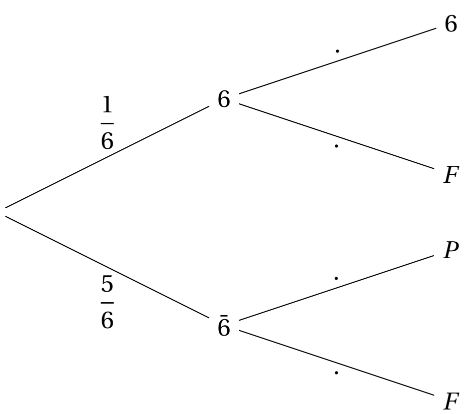
$P(X \leqslant 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$P(X=1) = (\frac{5}{6})^{1-1} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = (\frac{5}{6})^{2-1} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(X=3) = (\frac{5}{6})^{3-1} * \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

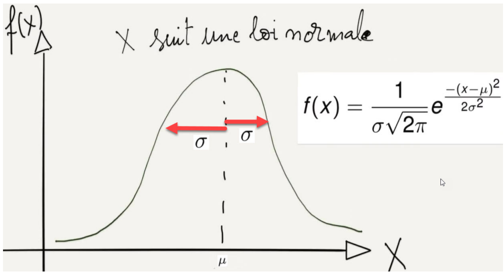
La probabilité est égale à : $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}$

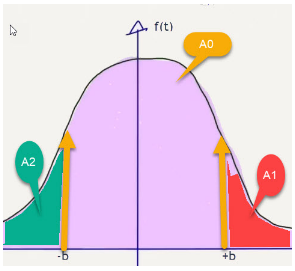


2.10 Loi normale

Dans une loi **binomiale**	Dans une loi **normale**
voir les pré-requis	voir les pré-requis
$X \in \aleph$ est une variable **discrète**	$X \in \Re$ est une variable **continue**
$X = 0, 1, 2..., n$	-
$P(X = k) = \complement_n^k P^k * (1-P)^{n-k}$	-
$X \sim \mathscr{B}(n, P)$	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
n	μ = Moyenne de X ici représenté par m
P probabilité de réussir	σ = Écart type et σ^2 = Variance

Si n devient grand, Alors on passe sur une loi normale.





Si Toutes lois normales Alors elle peut être ramenée à une loi centrale réduite grâce au changement de variable.

Si X suit la loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Alors On remplace X par $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$
Car $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [0 étant la moyenne et l'origine des axes de la courbe]

Légende : $A1 \Rightarrow P(T \geqslant +b)$ | $A2 \Rightarrow P(T \leqslant +b)$ | $A0 \Rightarrow P = 1$

Propriété très importantes

Dans la table des probabilités, on ne peut calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^+)$

Pour utiliser cette table on doit souvent avoir recours aux propriétés suivantes :

$P(T \geqslant -a) = P(T \leqslant +a)$ || $P(T \geqslant +b \Leftrightarrow P = 1 - P(T < b)$
$P(a \leqslant T \leqslant b) \Rightarrow P(T \leqslant b)$-$P(T \leqslant a)$ Si $a < 0$ Alors $P(T \leqslant a)$=$1 - P(T \leqslant +a) \longmapsto a$ dans table.

Procédure

1. Paramétrage de la Loi normal (récupération des données de l'énoncé).
   Si la **moyenne** $\mu = m$ et l'**écart type** $\sigma = e$ Alors $\Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(m, e)$.
2. Traduction mathématique de l'événement "Exemple : coûte au moins 200 €." $\Rightarrow$ $P(X \geqslant 200)$
3. On remplace la variable X par $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ Exemple : $P(T \geqslant \frac{200-\mu}{\sigma})$.
4. On adapte l'expression de la probabilité à la forme $P(T \leqslant +b)$.
5. On exploite table de probabilité sur la loi normale centrée.

3 Le vocabulaire

- Le terme **probabilité**, c'est l'inverse de la certitude.
  Il s agit d'une estimation de la réalisation de quelque chose sur une échelle de 0 à 1 (1 étant la réalisation).
  0 $\qquad$ 0,5 $\qquad$ 1

- **Expérience** (ou l'épreuve)**aléatoire**
  aboutit sur un résultat parmi plusieurs possible que l'on ne peu pas prévoir.

- L'**éventualité (ou issue)**
  Il s agit d'un résultat possible

- **L'événement**
  Ensemble de résultats dans une épreuve aléatoire.
  On lance un dés. "Je veux obtenir un nombre pair". C'est un événement.

- **L'univers**
  C'est l'ensemble des résultats possibles.
  L'univers se note Ω
  Si on lance un dés Alors $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

- **Événement certain**
  Tous événement qui réalise l'univers Ω
  Exemple : Pour un lancé de dés. Evt certain "Obtenir un numéro compris entre 1 et 6".

- **Événement impossible**
  Exemple : Pour un lancé de dés. Evt impossible "Obtenir un numéro supérieur à 7".
  L'ensemble des résultats d'un Evt impossible est un ensemble vide $\emptyset$

- **L'union de 2 événements**
  L'événement $A \bigcup B$ **est réalisé dés que** A **ou** B **est réalisé**.

- **L'intersection de 2 événements**
  L'événement $A \bigcap B$ **est réalisé dés que** A **et** B **sont réalisés dans la même expérience.**

- **L'événement contraire**
  Dans le lancer de dé, Si l'événement A est *"obtenir un nombre pair"*, Alors l'événement contraire de A, $\bar{A}$ est l'événement *"obtenir un nombre impair"*.

- **Événement incompatible**
  Si l'intersection de deux événements est un ensemble vide Alors on parle d'événements incompatibles

4 Diagramme de Venn

Expérience aléatoire :

"Lancer d'un dé"

L'univers $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

Événement A "Obtenir un nombre pair". $A = 2;4;6$

Événement B "Obtenir un multiple de 3". $B = 3;6$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5". $C = 1;5$

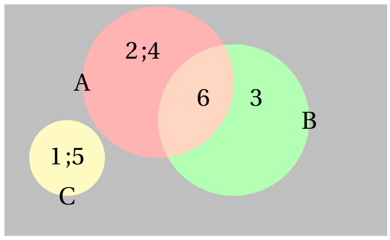
Analyse :

L'univers $\Omega = 1;2;3;4;5;6$

Événement A "Obtenir un nombre pair". $A = 2;4;6$

Événement B "Obtenir un multiple de 3". $B = 3;6$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5". $C = 1;5$



Démonstration :

$A \bigcup B = \{2;4;3;6\}$

$A \bigcap B = \{6\}$

$\bar{A} = \{1;3;5\}$

$\bar{B} = \{1;2;4;5\}$

$\bar{C} = \{2;3;4;6\}$

$A \bigcap C = \{\phi\}$

La notion de cardinal :

Cardinal $\Omega = 6$

Événement A "Obtenir un nombre pair." Cardinal $A = 3$. $A = \{2;4;6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Événement B "Obtenir un multiple de 3." Cardinal $B = 2$. $B = \{3;6\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Événement C "Obtenir le résultat 1 ou 5." Cardinal $C = 2$. $C = \{1;5\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Propriétés importantes : :

$A \bigcup \bar{A} = \Omega$ et $B \bigcup \bar{B} = \Omega$

$A \bigcap \bar{A} = \phi$ et $B \bigcap \bar{B} = \phi$

$Card(A \bigcup B) = Card A + Card B - Card(A \bigcap B))$ dans notre exemple $\Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4$

$Card(A \bigcup C) = Card A + Card B$

$Card(A \bigcup B = \frac{Card A}{Card \Omega} + \frac{Card B}{Card \Omega} - \frac{Card(A \bigcap B)}{Card \Omega}) \Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4$

Donc $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

5 Calculer une probabilité

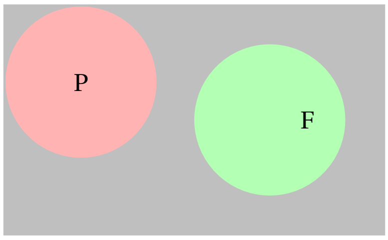
5.0.1 Exemple 1

Expérience aléatoire :

"Lancer une pièce de monnaie"

Analyse :

Deux résultats possible : soit pile ou soit face.



Evénements :

A) Quelle est la probabilité d'avoir Pile ou Face ?

C'est toujours Pile ou Face

$P(\Omega) = 1$ avec $\Omega = \{P; F\}$ et $Card C = 2$

B) Quelle est la probabilité d'avoir Pile ?

$P(P) = \frac{1}{2}$ et $P(F) = \frac{1}{2}$

C) EVT A : "Obtenir Pile" $\Rightarrow A = \{P\}$ et $Card A = 1$

D) EVT B : "Obtenir Face" $\Rightarrow B = \{F\}$ et $Card B = 1$

Propriétés importantes : :

$P(A) = \frac{Nombre de cas ou A se réalise}{Nombre de cas possible} = \frac{Card A}{Card \Omega}$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{Nombre de cas ou B se réalise}{Nombre de cas possible} = \frac{Card B}{Card \Omega}$ dans notre exemple $\frac{1}{2}$

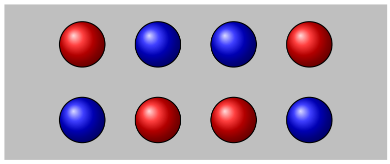
5.0.2 Exemple 2

Expérience aléatoire :

"Un sac contenant des boules de couleurs"

Analyse :

—



Evénements :

A) Quelle est la probabilité de tirer une boule bleu? $\Rightarrow P(b) = \frac{4}{8} = 0,5$

- Si on retire une boule rouge Alors $P(b) = \frac{4}{7}$

- Si on retire trois boules bleue et une boule rouge Alors $P(b) = \frac{1}{3}$

B) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge .$\Rightarrow P(r) = \frac{2}{3}$

Propriétés importantes : Le calcul de la probabilité qu'un événement A se produise est :

$$P(A) = \frac{NombredecasouAseréalise}{Nombredecaspossible}$$

La probabilité P doit vérifier :

1 - Pour tout événement de A, $0 \leq P(A) \leq 1$

2 - $P(\Omega) = 1$

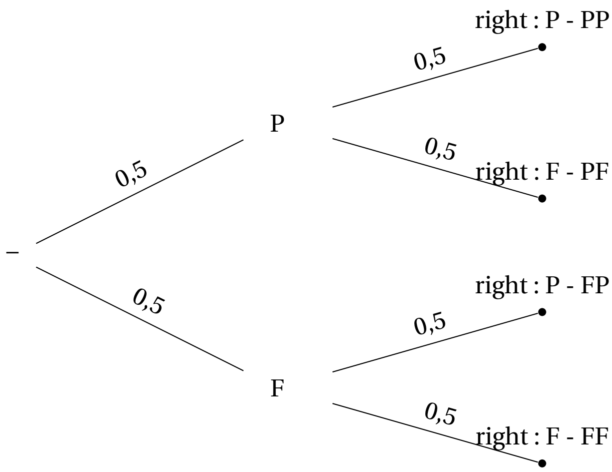
3 - $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

4 - $P(A \bigcup) B = P(A) + P(B)$ pour $A \bigcap B = 0$

6 Arbre de probabilité

Expérience aléatoire :

"Lancer de pièce de monnaie"



Analyse :

- Événement P "Obtenir Pile".
- Événement F "Obtenir Face".

Evénements :

A) Événement PF : "Obtenir Pile et Face indépendamment de l'ordre". $P(PF) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} soit 25\%$
ou le produit des chemins $2(0,5 * 0,5) = 0,5$

B) Événement PP : "Obtenir Pile et Pile". $P(PP) = \frac{1}{4} = 0,25$
ou le produit des chemins $0,5 * 0,5 = 0,25$

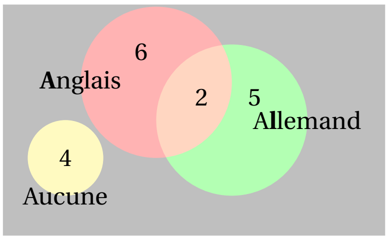
C) Événement FF : "Obtenir Face et Face". $P(FF) = \frac{1}{4}$
ou le produit des chemins $0,5 * 0,5 = 0,25$

7 Probabilité conditionnelle

Expérience aléatoire :

"Une classe est composée de 17 élèves"

–



Analyse :

- 8 élèves étudient l'anglais.
- 7 élèves étudient l'allemand.
- 8 élèves étudient l'anglais et l'allemand.

Evénements :

A) Probabilité qu'un élève n'étudie que l'anglais

$P(A) = \frac{8}{17}$

B) Probabilité qu'un élève n'étudie que Allemand

$P(L) = \frac{7}{17}$

C) "Probabilité conditionnelle".

1] information certifiée → On sait qu'un élève étudie l'anglais ⇒ $\Omega = A$,

2] Information conditionnelle → c'est quoi la probabilité qu'il étudie l'allemand ?"

$P_A(L) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P_A(L) = \frac{P(A \bigcap L)}{P(A)} \Leftrightarrow P_A(L) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Note : Quand on écrit $P_A(L)$, on lit la probabilité de L $P(L)$ sachant que A est déjas réalisé.

Probabilité conditionnelle

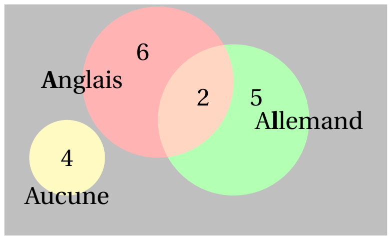
$P_A(L) = \frac{P(A \bigcap L)}{P(A)}$

8 Événements indépendants

Expérience aléatoire :

"Une classe est composée de 17 élèves"

–



Analyse :

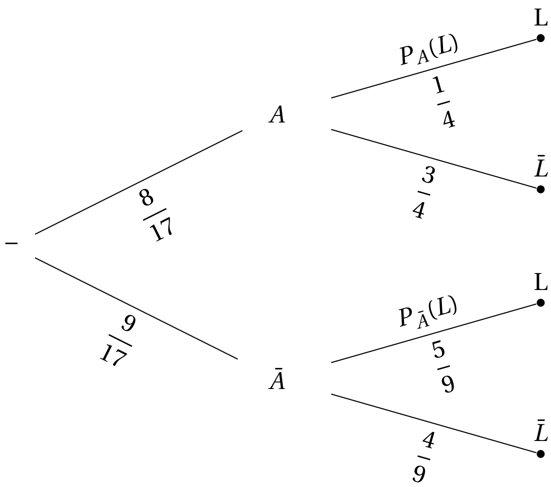
- 8 élèves étudient l'anglais.
- 7 élèves étudient l'allemand.
- 8 élèves étudient l'anglais et l'allemand.

L'univers $\Omega = 17$

Evénements :

On sait qu'un élève étudie l'anglais. c'est quoi la probabilité qu'il étudie l'allemand ?

$P_A(L) = \frac{P(A \bigcap L)}{P(A)}$ $P_A(L) = \frac{\frac{2}{P(\Omega)}}{\frac{8}{p(\Omega)}}$ $P_A(L) = \frac{1}{4}$



$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P_{\bar{A}}(L) = \frac{P(L \bigcap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{5}{9}$

$P_{\bar{A}}(\bar{L}) = P(Aucune) = \frac{4}{9}$

En probabilité, on parle de 2 événements indépendants quand la probabilité d'un événement L sachant l'autre événement A est égal a la probabilité de l'événement.

$P_A(L) = P(L)$

Or Dans cette situation les 2 événements ne sont pas indépendants.

$P_A(L) = \frac{1}{4}$ et $P(L) = \frac{7}{17}$

Pour démontrer l'indépendance entre 2 événement

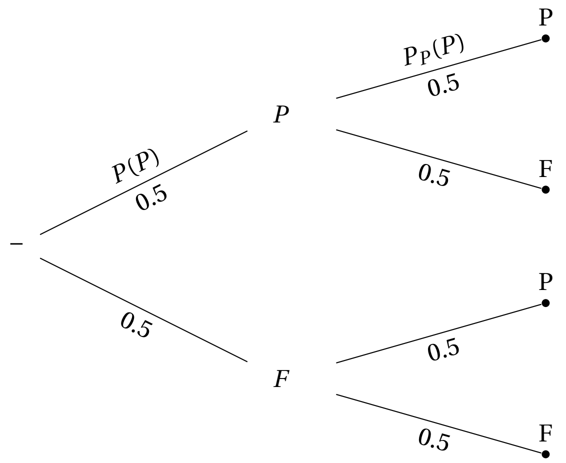
Il faut que : le premier choix $[A\ ou\ \bar{A}]$ n'est pas d'influence sur le deuxième choix $[L\ ou\ \bar{L}]$.

C'est a dire que :

la probabilité [L sachant A ici $1/4$] doit être la même que la [L sachant $\bar{A}$ bar ici $5/9$].

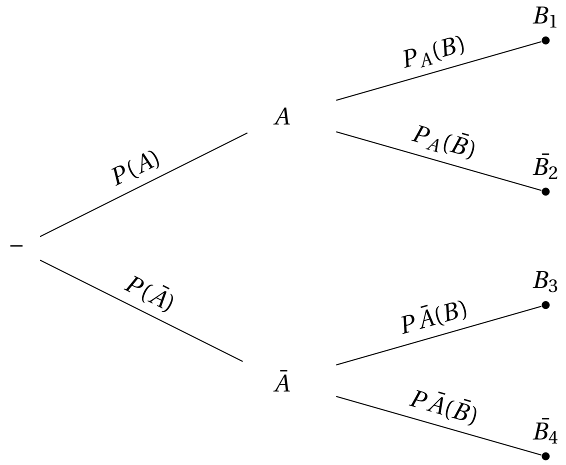
Cela veut dire que la réalisation de L n'a aucune relation avec la précédente $A\ ou\ \bar{A}$

Ici $A\ et\ L$ ne sont pas indépendants.



Expérience aléatoire
"Lancer de dés"
$P(P) = P_P(P)$
$P(F) = F_F(F)$

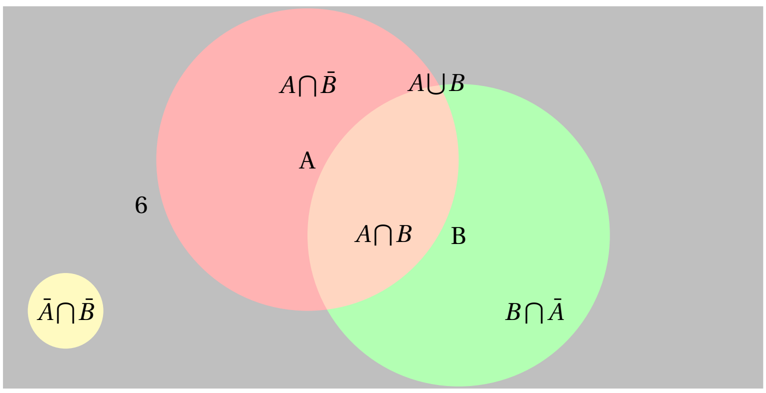
Les deux événements avoir pile ou avoir face sont **indépendants**.



Expérience aléatoire
"___"
$\bigcap$ veut dire que l'on réalise a la fois A et B.

1 - $P(A \bigcap B) = P_A(B)xP(A)$
2 - $P(\bar{B} \bigcap A) = P_A(B)xP(A)$
3 - $P(B \bigcap \bar{A}) = P_A(B)xP(A)$
4 - $P(\bar{B} \bigcap \bar{A}) = P_A(B)xP(A)$

Si deux événement A et B sont indépendants
Alors : $P(A \bigcap B) = P(B).P(A)$ Ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$



$P(B) = P(B \bigcap \bar{A}) + P(B \bigcap A)$
$P(B) = P_A(B).P()\bar{A} + P_A(B).P(A)$

Théorie des probabilités totales
$P(B) = P_A(B).P(\bar{A}) + P_A(B).P(A)$

9 Un tableau à double entrées

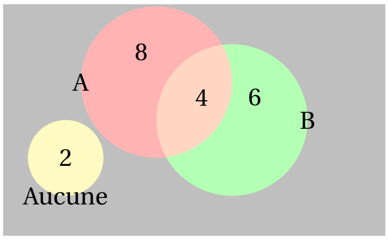
WP-CMS

Expérience aléatoire :
"Sur un échantillon composée de 20 élèves"

**"Est-ce qu'il aime
le cour d'anglais
ou bien le cours de biologie".**

L'analyse :
- 8 élèves aiment l'anglais.
- 6 élèves aiments la biologie.
- 4 élèves aiment les deux cours.
- 2 élèves restent

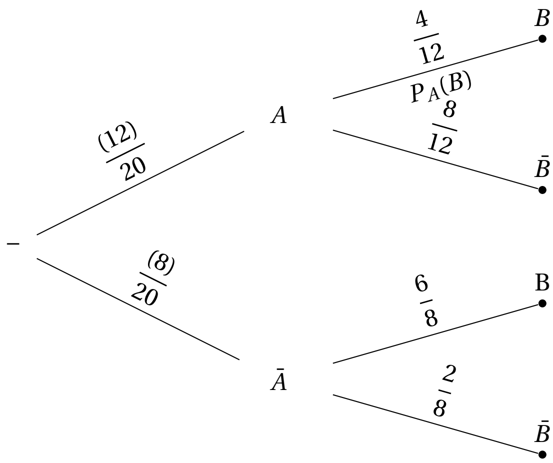
L'univers $\Omega = 20$



$P(A) = \frac{12}{20}$
$P(B) = \frac{20}{10} = \frac{1}{2}$
$P(A \bigcap B = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ Intersection des colonnes A et B.
$P(A \bigcup B) = \frac{18}{20}$
$P(\bar{A} \bigcap \bar{B}) = \frac{2}{20}$ ou $P(\bar{A} \bigcap \bar{B}) = 1 - P(A \bigcup B)$

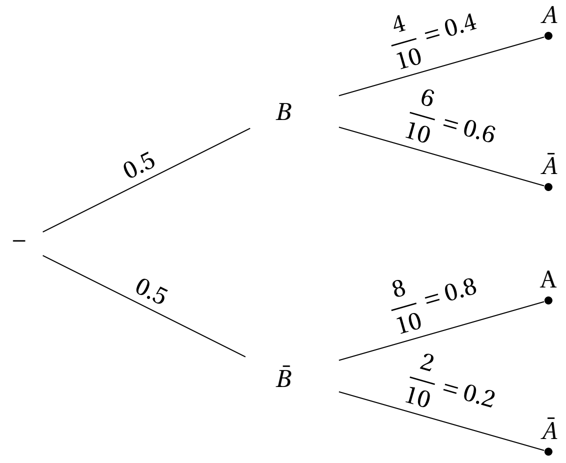
A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20

A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



Quand on écrit $P_A(B)$ qui se lit $P(B)$ sachant que A est réalisé.
Alors on se place sur la ligne de A et regarde les intersection avec B ou $\bar{B}$.

A B	B	$\bar{B}$	Total
A	4	8	12
$\bar{A}$	6	2	8
Total	10	10	20



10 Loi binomiale

Pré-requis :

Pour appliquer **la loi binomiale** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :

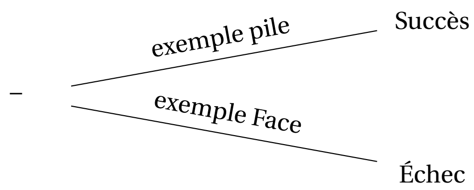
- être du type "épreuve de Bernoulli" ;
- pouvoir caractériser les paramètres espérance, variance et écart type ;
- être représentée par un arbre de probabilité pondéré.

L'analyse :

- **A**] L'épreuve de Bernoulli

  Dans une épreuve de Bernoulli seuls deux issues sont possible : **Succès** ou **Échec**.

  Exemple :



- **B**] La Loi de Bernoulli

x_i	1	0
$P(x = x_i)$	P	$(1-P)$

Légende : 1 = succès et 0 = échec.

L'espérance de X	$P \Rightarrow E(X) = P$
La variance de P	$P(1-P) \Rightarrow V(X) = P(1-P)$
L'écart type de X	$\sqrt{P(1-P)} \Rightarrow \sigma = \sqrt{P(1-P)}$

- **C**] Le schéma de Bernoulli

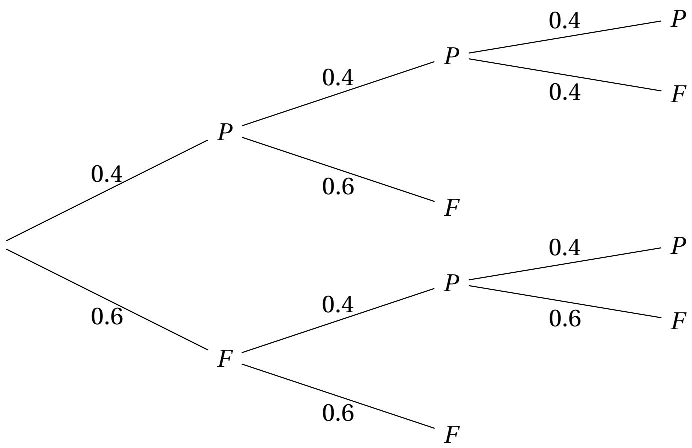
  Note sur les expériences :

  - On peut continuer ainsi jusqu'à le nième expérience.

  - Les expérience doivent être indépendantes les unes des autres. C'est a dire qu'à la fin de la $n-1$ expérience, on doit toujours avoir deux issus possibles **Succès** ou **Échec**.

  Exemple :

  Énoncé […]



La loi binomiale

- **A**] Prenons l'exemple du schéma de Bernoulli précédent.
  Si les n expériences sont indépendantes Alors leurs probabilités sont les mêmes.$P = 0.4$ et $F = 0.6$.

- **B**] Lancés de dé
  - Pour avoir 3 fois Pile : $P(X=3) = 0.4*0.4*0.4 = 0.4^3$
  - Pour avoir 2 fois Pile : $P(X=2) = (0.4*0.6*0.4 = 0.4) + (0.6*0.4*0.4) = 3*(0.4^2*0.6)$
  - Pour avoir 1 fois Pile : $P(X=1) = 3(0.4*0.6^2)$
  - Pour avoir 0 fois Pile : $P(X=0) = 0.6^3$

- **C**] Pour n=3

  $P(X=2) = 3*0.4^2*0.6^{(3-2)}$

  Note sur l'expérience :

  - Le 3 correspond au nombre deux fois que l'on peut avoir deux piles $X = 2$
  - Ce 3 peut s'écrire aussi $\mathbb{C}_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!}$

$$P(X=k) = \mathbb{C}_n^k P_{succes}^k * (1-P)_{echec}^{n-1}$$

11 Loi géométrique

WP-CMS

[02 :24 :24]

Pré-requis :

Pour appliquer **la loi géométrique** les pré-requis suivant s'imposent à l'épreuve :

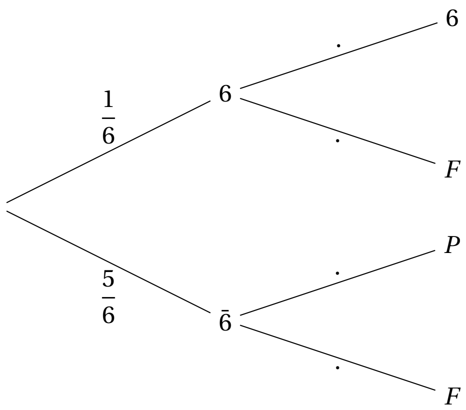
- répondre aux caractéristique d'une "épreuve de Bernoulli" ;

- de répéter continuellement les épreuves jusqu'à obtenir l'objectif.

L'analyse :

- **A]**Exemple
  On lance un dé continuellement jusqu'à obtenir un six.

  Soit X le nombre de lancers nécessaire.



- **B]** La loi géométrique

  – On note X le nombre de fois que l'on lance cette épreuve de Bernoulli.
  La variable aléatoire X va suivre une loi géométrique G de probabilité $\frac{1}{6}$.
  $X \sim G(\frac{1}{6})$

  – Le calcul de la **probabilité** avec $k_{1\to} + \infty$.
  $P(X = k) = \left[(1-P)^{k-1} * P\right] \Rightarrow$ Note importante : $(1-P)$ se lit ne pas avoir 6 et P avoir 6.

  – Calculer **la moyenne** de la variable aléatoire :
  $E(X) = \frac{1}{P} = 6$

  – Calculer **la variance** de X

  $V(X) = \frac{1-P}{P^2} = 30$

- "Obtenir un 6 au deuxième lancé"
  $P(X=2)=(1-\frac{1}{6})^{2-1}*\frac{1}{6}=\frac{5}{36}=0,138$
- "Obtenir 6 avant le troisième lancer inclus"
  $P(X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$
  $P(X=1)=(\frac{5}{6})^{1-1}*\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$
  $P(X=2)=(\frac{5}{6})^{2-1}*\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$
  $P(X=3)=(\frac{5}{6})^{3-1}*\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$
  La probabilité est égale à : $\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}$

Loi géométrique : $X\sim G(\frac{1}{6})$
Probabilité : $P(X=k)=\left[(1-P)^{k-1}*P\right]$
Espérance (ou moyenne) $E(X)=\frac{1}{P}=6$
La variance : $V(X)=\frac{1-P}{P^2}=30$

12 Fonctions une loi normal

[02 :37 :58]

Dans une loi **binomiale**

- $X \in \aleph$ est une variable **discrète**.
- $X = 0, 1, 2..., n$
- $P(X = k) = \complement_n^k P^k * (1 - P)^{n-k}$

Si n devient grand, Alors on passe sur une loi normale.

Dans une loi **normale**

- $X \in \Re$ est une variable **continue**.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- μ = Moyenne de X ici représenté par m
  σ = Écart type
  σ^2 = Variance

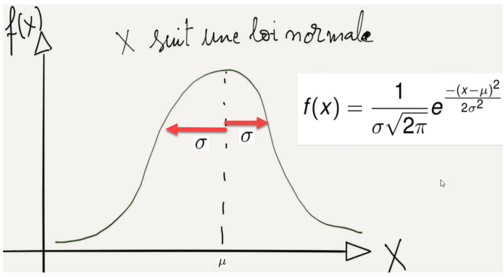


FIGURE 1 – *Loinormale*

la loi normale centrale réduite

Si une lois est reconnue normale Alors elle peut être ramenée à une loi centrale réduite grâce au changement de variable suivant :

Si X suit la loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Alors On remplace X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
Car $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [0 étant la moyenne et l'origine des axes de la courbe]

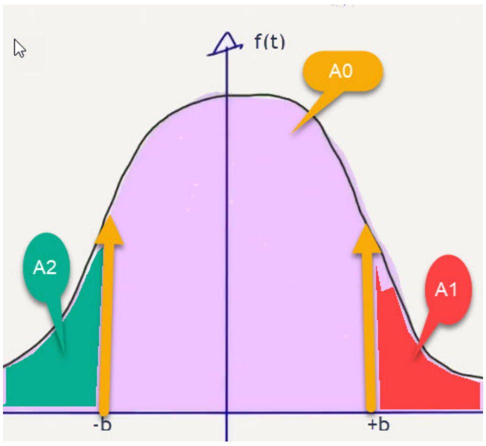


FIGURE 2 – *Loi normale* $\mu = 0$

Légende :

- Pour $A1 \Rightarrow P(T \geqslant +b)$
- Pour $A2 \Rightarrow P(T \leqslant +b)$
- Pour $A0 \Rightarrow P = 1$

Propriété très importants

Utilisation de la table des probabilités

Dans la table on ne peut calculer que des probabilité de la forme $P(T \leqslant \Re^{+})$

Utilisation de la table des probabilités

Pour utiliser cette table on doit souvent avoir recours aux propriétés suivantes :

$P(T \geqslant -a) = P(T \leqslant +a$
$P(T \geqslant +b \Leftrightarrow P = 1 - P(T < b)$

Procédure

1. Paramétrage de la Loi normal (récupération des données de l'énoncé).
   Si la **moyenne** $\mu = m$ et l'**écart type** $\sigma = e$ Alors $\Rightarrow$ la **loi normale** $X \sim \mathcal{N}(m, e)$.
2. Traduction mathématique de l'événement "—[...]—."
3. On remplace la variable X par $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.
4. On adapte l'expression de la probabilité à la forme $P(T \leqslant +b)$.
5. On exploite table de probabilité sur la loi normale centrée.