



# Suites numériques 1er et Terminale

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

- Document de référence
- Mémo – vecteurs, droites et plans dans l'espace
- Vecteurs – exercices – partie – 2
- Vecteurs – matrice – exemple – concret

<b>1 Plan du document</b>	<b>2</b>
<b>2 Préface</b>	<b>4</b>
<b>3 Suites antithétiques</b>	<b>4</b>
3.0.1 Définition : . . . . .	4
3.0.2 Remarques : . . . . .	4
3.0.3 Sens de variation : . . . . .	4
3.0.4 somme des termes : . . . . .	5
<b>4 Suites géométriques</b>	<b>6</b>
4.1 Définition : . . . . .	6
4.1.1 Remarques : . . . . .	6
4.1.2 Sens de variation : . . . . .	6
4.1.3 somme des termes : . . . . .	6
<b>5 Suites arithmético-géométriques</b>	<b>7</b>
5.1 Définition : . . . . .	7
5.1.1 Remarques : . . . . .	7
<b>6 Raisonnement par récurrence</b>	<b>8</b>
6.1 Principe de récurrence : . . . . .	8
<b>7 Limites se suites</b>	<b>9</b>
7.0.1 Convergence : . . . . .	9
7.0.2 Unicité de la limite : . . . . .	9
7.0.3 Limite d'une suite arithmétique : . . . . .	9
7.0.4 Limite d'une suite géométrique : . . . . .	9
7.0.5 Limites de suites usuelles : . . . . .	9
7.0.6 Théorèmes de comparaison de limites : . . . . .	9
7.0.7 Théorème de convergence monotone : . . . . .	10
7.1 Propriété pour les suites monotones non bornées : . . . . .	10
7.1.1 Théorème des gendarmes : . . . . .	10
7.2 Opérations sur les limites : . . . . .	10
<b>8 Formes indéterminées</b>	<b>11</b>
8.1 Forme $-\infty + \infty$ ou $+\infty - \infty$ . . . . .	11
8.2 Forme $\infty 0$ . . . . .	11
8.3 Forme $\infty \div \infty$ . . . . .	12
<b>9 Suites Majorée ou Minorée :</b>	<b>12</b>
<b>10 Suite définie par récurrence :</b>	<b>13</b>

<b>11 Raisonnement par récurrence :</b>	<b>WP-CMS 14</b>
<b>12 Exercices corrigés – Niveau 1 :</b>	<b>15</b>
12.1 Exercice 01 : .....	15
12.2 Exercice 02 : .....	15
12.3 Exercice 03 : .....	15
12.4 Exercice 04 : .....	15
<b>13 Exercices corrigés – Niveau 2 :</b>	<b>15</b>
13.1 Exercice 01 : .....	15
13.2 Exercice 02 : .....	15
13.3 Exercice 03 : .....	16

**Une suite** en mathématiques, est une famille d'éléments — appelés ses « termes » — indexée par les entiers naturels.

Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé « longueur » de la suite.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

### Exemple :

Lorsque une série d'éléments est placée sous forme de liste ordonnée, on parle de suite. Pour qu'il y ait une suite, il doit y avoir un motif répétitif qui explique l'ordre des éléments dans la liste. Il existe plusieurs sortes de suites. Parmi elles, certaines sont numériques puisque elles font intervenir des nombres, alors que d'autres ne le sont pas.

## 3 Suites antithétiques

### 3.0.1 Définition :

Une suite  $U$  est dite **arithmétique** s'il existe  $r \in \mathcal{R}$  tel que pour tout  $n \in I$   $U_{n+1} = U_n + r$

Le réel  $r$  est la **raison** de la suite.



**La relation de récurrence :**  $U_{n+1} = U_n + r$

**La formule explicite :**  $U_n = U_0 + nr$  ou  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + r \end{cases}$

### 3.0.2 Remarques :

- La formule explicite se généralise :  $U_n = U_p + (n - p)r$
- La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés, car une suite arithmétique est une fonction affine définie sur  $\mathcal{N}$  (on rappelle que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite).

### 3.0.3 Sens de variation :



Une suite arithmétique est

- **constante** si  $r = 0$ ,
- strictement **croissante** si  $r > 0$ ,
- strictement **décroissante** si  $r < 0$ .

### Exemples :

- $U_{n+1} = U_n + 4$  (suite arithmétique de raison 4).
- $V_n = 5 - 3n$  (suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 5)
- $U_n = U_0 + nr$   
Si on connaît un terme et la raison. Alors on peut calculer n'importe quel terme.  $U_{20} = U_{10} + 10 * r$
- On peut aussi retrouver la raison à partir de deux termes éloignés.  
Si  $U_3 = 10$  et  $U_7 = 34$ . Alors la raison est 6 ( $4 * 6$ ) car on a avancé de 24 ( $34 - 10$ ) en 4 termes ( $7 - 3$ ).

#### 3.0.4 somme des termes :

**Somme de tous les termes :**  $\sum_{k=1}^n U_k = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Somme à partir d'un rang  $p$  :**  $\sum_{k=p}^n U_k = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (n - p + 1) * \frac{U_p + U_n}{2}$

## 4 Suites géométriques

WP-CMS

### 4.1 Définition :

Une suite  $U$  est dite géométrique s'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in I$   $U_{n+1} = U_n * q$

Le réel  $q$  est la **raison** de la suite.



**La relation de récurrence :**  $U_{n+1} = U_n * q$

**La formule explicite :**  $U_n = U_0 + q^n$

#### 4.1.1 Remarques :

- La formule explicite se généralise :  $U_n = U_p + q^{(n-p)}$

#### 4.1.2 Sens de variation :



Une suite géométrique est

- Si  $U_0 > 0$  Alors

$U$  est strictement **croissante** si  $Q > 1$

$U$  est strictement **décroissante** si  $0 < q < 1$

$U$  est **constante** si  $q = 0$  (tous les termes sont nuls) ou si  $q = 1$

- Si  $U_0 < 0$  Alors

$U$  est strictement **décroissante** si  $0 < q < 1$

$U$  est strictement **croissante** si  $0 < q < 1$

$U$  est **constante** si  $q = 0$  (tous les termes sont nuls) ou si  $q = 1$

- Si  $Q < 0$  Alors La suite est dite **alterné** (ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

Exemples :

$$U_{n+1} = -2U_n \text{ (suite géométrique de raison -2)}$$

$$V_n = 5 * \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ (suite arithmétique de raison } \frac{1}{3} \text{ et de premier terme 5)}$$

#### 4.1.3 somme des termes :

Pour  $q \neq 1$  **Somme de tous les termes** :  $\sum_{k=0}^n U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 * \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$

Pour  $q \neq 1$  **Somme à partir d'un rang  $p$**  :  $\sum_{k=p}^n U_k = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (U_p) * \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$

## 5 Suites arithmético-géométriques

WP-CMS

### 5.1 Définition :

Une suite  $U$  est dite **arithmético-géométriques** s'il existe  $a et b \in \mathcal{R}$  tel que pour tout  $n \in I$   $U_{n+1} = aU_n + b$

#### 5.1.1 Remarques :

- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle  $a = 1$
- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle  $b = 0$

Recherche de la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique  $U$  :

- 1) On construit une suite géométrique  $V$  telle que  $V_n = U_n - \alpha (\alpha \in \mathcal{R})$
- 2) On exprime  $V_n$  en fonction de  $n$  (formule explicite).
- 3) On en déduit l'expression de  $U_n$

Exemple :

$$U_{n+1} = 3U_n - 1 \text{ et } U_0 = 2$$

- 1) On pose  $V_n = U_n - \alpha$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = 3U_n - 1 - \alpha$$

$$U_n = V_n + \alpha$$

$$\text{d'où } V_{n+1} = 3(V_n + \alpha) - 1 = 3V_n + 3\alpha - 1 - \alpha$$

$$V_n = 3V_n + 2\alpha - 1$$

Pour que  $V$  soit une suite géométrique, il faut qu'il existe  $q$  tel que  $V_{n+1} = V_n * q$

On a donc :  $q = 3$  et  $2\alpha - 1 = 0$

$$2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = 3V_n \Rightarrow V_n = V_0 * 3^n \Rightarrow V_0 = U_0 - \alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$V_n = \frac{3}{2} * 3^n \Rightarrow U_n = V_n + \alpha$$

$$\text{d'où } U_n = \frac{3}{2} * 3^n + \frac{1}{2} \text{ (formule explicite de la suite u)}$$

## 6 Raisonnement par récurrence

WP-CMS

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer certaines propriétés de suites à partir de leur relation de récurrence.

Par ailleurs, ce raisonnement n'est pas uniquement valable pour les suites.

### 6.1 Principe de récurrence :



Soit une proposition  $P_n$  dépendant d'un entier  $n$  (son rang).

Pour démontrer que  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ , il suffit de démontrer que :

- 1) la proposition  $P_{n_0}$  est vraie.
- 2) si  $P_p$  est vraie (avec  $p > n_0$ ) alors  $P_{p+1}$  est vraie.

L'étape 1) est l'initialisation du raisonnement par récurrence.

L'étape 2) est la démonstration de l'héritéité de la propriété.

Exemple :

$S_n = \sum_{k=0}^n 2^k$  Démontrer que pour tout entier  $n > 0$  la proposition «  $S_n = 2^{n+1} - 1$  » est vraie.

*Initialisation*

$S_1 = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$  et  $2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ . donc la proposition est vraie pour  $n = 1$ .

*Héritéité*

Soit un entier  $p > 0$ . Supposons que  $S_p = 2^{p+1} - 1$

$$\text{Alors } S_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} 2^k = S_p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1}$$

$$S_{p+1} = 2 * 2^{p+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$$

$$S_{p+1} = 2^{(p+1)+1} - 1$$

Donc si la proposition est vraie pour  $p > 0$  alors elle est vraie pour  $p + 1$

La proposition est héréditaire.

*Conclusion :* La proposition «  $S_n = 2^{n+1} - 1$  » est vraie pour  $n = 1$ , et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier  $n > 0$ .

### 7.0.1 Convergence :

Si une suite a une limite finie ( $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ ), Alors on dit qu'elle est **convergente**.

Exemple :  $U_n = 10 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 10$

Dans le cas contraire (limite infinie ou absence de limite), on dit qu'elle est **divergente**.

Exemple :  $U_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$  |  $U_n = -n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$  |  $U_n = (-1)^n$  (pas de limite).

### 7.0.2 Unicité de la limite :

Si une suite est convergente Alors elle admet une **unique limite**.

### 7.0.3 Limite d'une suite arithmétique :



- Si  $r > 0$  Alors la suite **tend vers**  $+\infty$
- Si  $r < 0$  Alors la suite **tend vers**  $-\infty$

### 7.0.4 Limite d'une suite géométrique :



- Si  $q > 1$  et si  $U_{0>0}$  Alors la suite **tend vers**  $+\infty$  (elle est divergente)
- Si  $q > 1$  et si  $U_{0<0}$  Alors la suite **tend vers**  $-\infty$  (elle est divergente)
- Si  $0 < q < 1$  Alors la suite **tend vers** 0 (elle est convergente)
- Si  $q < 0$  Alors la suite la suite n'a pas de limite (elle est divergente)

### 7.0.5 Limites de suites usuelles :

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty$ ( $p > 0$ )
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$ ( $p > 0$ )
$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$	-	-	-	-

### 7.0.6 Théorèmes de comparaison de limites :

Soient deux suites  $U$  et  $V$  de limites respectives  $l$  et  $l'$ .

Si à partir d'un certain rang  $U_n \geq V_n$  alors  $l \geq l'$

Soient deux suites  $U$  et  $V$  telles que  $U_n \geq V_n$  à partir d'un certain rang.

- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$  Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -\infty$  Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = -\infty$

### 7.0.7 Théorème de convergence monotone :

WP-CMS

- Si une suite  $U$  est **croissante et majorée** (à partir d'un certain rang  $U_n \leq M$ ) Alors elle est **convergente** ( avec  $l \leq M$ )

- Si une suite  $U$  est **décroissante et minorée** (à partir d'un certain rang  $U_n \geq m$ ) Alors elle est **convergente** ( avec  $l \geq m$ )

## 7.1 Propriété pour les suites monotones non bornées :

- Si une suite  $U$  est croissante et non majorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

- Si une suite  $U$  est décroissante et non minorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

### 7.1.1 Théorème des gendarmes :

Soient un réel  $l$  et trois suites  $U, V$  et  $W$  telles qu'à partir d'un certain rang  $U_n \leq V_n \leq W_n$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$  Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$

## 7.2 Opérations sur les limites :

- Limite de  $U + V$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$l$	$+\infty$	$-\infty$
$l'$		$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	-
$-\infty$		$-\infty$	-	$-\infty$

- Limite de  $U * V$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$l \ l > 0$	$l \ l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'$ avec $l' > 0$		$l * l'$	$l * l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'$ avec $l' < 0$		$l * l'$	$l * l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0		0	0	0	-	-
$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	-	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$	-	$-\infty$	$-\infty$

- Limite de  $\frac{U}{V}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{U_n}$
$l$ avec $l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$0_+$	$+\infty$
$0_-$	$-\infty$

- Limite de  $\frac{U}{V}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$l l > 0$	$l l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'$ avec $l' > 0$	$l$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'$ avec $l' < 0$	$l$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$0_+$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-	$+\infty$	$-\infty$
$0_-$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	0	-	-
$-\infty$	0	0	0	0	-	-

## 8 Formes indéterminées

### 8.1 Forme $-\infty + \infty$ ou $+\infty - \infty$

Exemple :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n^2 + 1$

Il y a une forme indéterminée de type  $+\infty - \infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

Méthode :

Quand il y a une forme indéterminée du type  $-\infty + \infty$  ou  $+\infty - \infty$  : 1. On factorise l'expression par son terme de plus haut degré. 2. On utilise les règles de calcul sur la limite d'un produit Exemple :

$$n^3 - n^2 + 1 = n^3 \left( 1 - \frac{n^2}{n^3 + \frac{1}{n^3}} \right) = n^3 \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \text{ donc } [a \mapsto \infty \ b \mapsto 1 \ c \mapsto 0 \ d \mapsto 0] \text{ Donc l'expression} \mapsto +\infty$$

### 8.2 Forme $\infty 0$

Exemple :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} * \frac{1}{n}$

Il y a une forme indéterminée de type  $\infty 0$

Méthode :

Dans ce cas, on peut essayer de multiplier les deux suites entre elles pour se ramener à un quotient.

Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} * \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

WP-CMS

### 8.3 Forme $\infty \div \infty$

En général, cela se produit en présence d'un quotient de deux polynômes. Dans ce cas, on factorise le haut et le bas par le terme de plus haut degré du polynôme le plus petit.

Méthode :

- Pour  $\frac{n^4 + n^2 + 1}{n^3 + n}$  on factorise par  $n^3$

- Pour  $\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$  on factorise par  $n^2$

Ensuite, on utilise les règles sur les limites d'une somme et d'un quotient.

## 9 Suites Majorée ou Minorée :

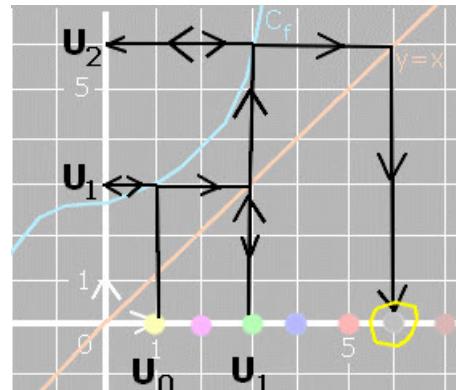


On dit qu'une **suite  $U$**  est **majorée**

S'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathcal{N}, U_n \leq M$

Le nombre  $M$  est alors appelé un **majorant** de la suite  $U$

La suite  $U_n$  avec  $n > 0$  définie par  $\forall n \in \mathcal{N}$  relatif,  
 $U_n = \frac{1}{n}$  majorée par 1 car  $\forall n \in \mathcal{N}$  relatif  $\neq 0$   
on a  $U_n \leq 1$ .



On dit qu'une **suite  $U$**  est **minorée**

S'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathcal{N}, U_n \geq m$

Le nombre  $m$  est alors appelé un **minorant** de la suite  $U$

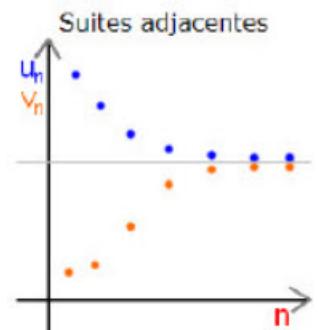
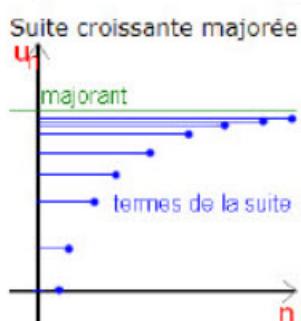
-



On dit que la suite  $U$  est **bornée** S'il elle est à la fois **majorée** et **minorée**.

i

- Suite **croissante et majorée** est **convergente**
  - Suite **décroissante et minorée** est **convergente**
  - Suite **croissante** est toujours **minorée** par son premier terme.
  - Suite **décroissante** est toujours **majorée** par son premier terme.
  - Suite monotone peut être convergente ou divergente
- Si deux suites sont adjacentes,  
Alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.



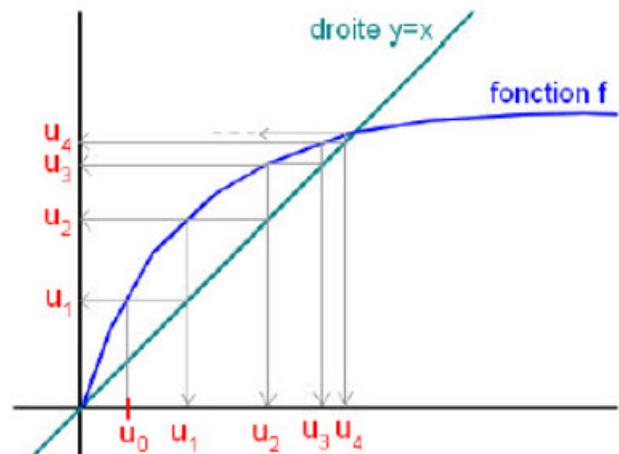
## 10 Suite définie par récurrence :

Une suite définie par récurrence est une suite dont on connaît un terme et une relation reliant pour tout  $n$  le terme  $U_{n+1}$  au terme  $U_n$ .

Exemple : la suite  $\begin{cases} U_0 = 25 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$  est définie par récurrence.

**Calcul :**

Appelons  $f$  la fonction qui donne  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$ .



Si  $f$  est continue et que  $U$  est convergente,

- en appelant  $l$  la limite de  $U$

- et en calculant la limite quand  $n \rightarrow \infty$  des deux membres de la relation de récurrence

Si on obtient l'égalité  $l = f(l)$ .

Puis

On rapporte  $U_1$  sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation  $y = x$  : depuis  $U_1$  sur l'axe des ordonnées,

On se déplace horizontalement vers cette droite puis une fois qu'on la touche, on descend vers l'axe des abscisses.

Comme  $U_2 = f(U_1)$ , on peut ensuite avec la courbe de  $f$  placer  $U_2$  sur l'axe des ordonnées.

Enfin, comme pour  $U_1$ , on rapporte ensuite sa valeur sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation  $y = x$ .

On renouvelle ensuite ces étapes afin d'avoir  $U_3$ ,  $U_4$ , etc. sur l'axe des abscisses.

Au bout d'un moment, on peut deviner Si la suite est convergente, et Si oui, quelle est sa limite.

## 11 Raisonnement par récurrence :

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement qui permet de démontrer qu'une propriété qui dépend d'un entier naturel  $n$  est vraie pour tout  $\mathcal{N}$ .

Exemple : un raisonnement par récurrence permet de démontrer que  $4^n - 1$  est toujours un multiple de 3.

Méthode : Appeler  $P_n$ ="la propriété que l'on veut démontrer". On pose donc " $P_n = 4^n - 1$  est un multiple de 3".

Montrer que  $P_0$  est vraie. Ici  $P_0$  est vraie, car  $4 * 0 - 1 = 0$  et 0 est un multiple de 3.

Montrer que  $\forall n \in \mathcal{N}$ , Si  $P_n$  est vraie, Alors  $P_{n+1}$  est encore vraie.

Rédiger : "Soit  $n \in \mathcal{N}$ . Supposons que  $P_n$  soit vraie".

Montrer que  $P_{n+1}$  est encore vraie, donc  $4n + 1 - 1$  est un multiple de 3

C'est l'étape la plus difficile, mais après quelques calculs, on y arrive.

$$4^n - 1 = 4^n * 4 - 1 = 4^n(3 + 1) - 1 = 4^n * 3 + 4^n * 1 - 1 = 4^n * 3 + 4^n - 1$$

$4^n * 3$  est bien sûr un multiple de 3.

$4^n - 1$  est un multiple de 3 car  $P_n$  est vraie.

La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 donc  $4^n * 3 + 4^n - 1$  est un multiple de 3.

Donc  $4^{n+1} - 1$  est un multiple de 3, donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Donc, comme  $P_0$  est vrai et que  $n \in \mathcal{N}$ ,  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ , on  $P_0 \Rightarrow P_1$ , donc  $P_1$  est vrai, puis  $P_1 \Rightarrow P_2$  donc donc  $P_2$  est vrai, etc.

Donc  $P_n$  est vraie  $\forall n$ .

**Rédiger** : "Par principe de récurrence,  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ ".

## 12 Exercices corrigés – Niveau 1 :

WP-CMS

### 12.1 Exercice 01 :

1/ On considère les suites  $U, V, W$  définies sur  $\mathcal{N}$  par :

$$U_n = 3n + 1 \quad V_n = \frac{n}{n+1} \quad w_n = -n^2 + 2n - 1$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites.

2/ On considère les suites  $U, V, W$  définies sur  $\mathcal{N}$  par :

$$U \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases} \quad V \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{V_{n+1}} \end{cases} \quad W \begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = -W_n^2 + 2W_n - 1 \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

### 12.2 Exercice 02 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

$$U_n = \frac{2n+1}{3n+1} \quad U_n = \frac{-n+4}{-2n+5}$$

### 12.3 Exercice 03 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

$$U_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad U_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} + 3$$

### 12.4 Exercice 04 :

Soit la suite numérique  $U_n$  telle que  $U_n = \frac{5n}{2+n^2} \forall n \in \mathcal{N}$

1/ Cette suite est-elle monotone, majorée, minorée ? 2/ A partir de quel rang est-elle strictement décroissante ?

## 13 Exercices corrigés – Niveau 2 :

### 13.1 Exercice 01 :

La suite  $U_n$  est définie par  $U \begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = -U_n^2 + 5U_n - 4 \end{cases} \forall n \in \mathcal{N}$

1/ Calculer  $U_1, U_2, U_3$

2/ Étudier le sens de variation de la suite  $U_n$ .

3/ Quelle valeur aurait-il fallu donner à  $U_0$  pour que la suite soit constante ?

### 13.2 Exercice 02 :

Soit  $U_n$  la suite numérique définie par  $U_0 = a$  et la relation de récurrence  $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$

1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ? 2/ Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $U_{n+2}$  fonction de  $U_n$ . Conclure.

### 13.3 Exercice 03 :

Soit la suite  $U_n$  telle que  $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \forall n \in \mathcal{N}$

A - Approche « récurrente » :

- 1/ Vérifier  $0 \leq U_n \leq 1$  pour tout entier  $n$ .
- 2/ Montrer que la suite  $U$  est croissante. Qu'en conclure?
- 3/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$

B - Approche « fonctionnelle » :

Soit  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  telle que  $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

- 1/ Montrer que  $f$  est continue, strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .
- 2/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3/ Expliquer pourquoi l'approche « fonctionnelle » permet d'obtenir les résultats cherchés dans la partie A , alors qu'elle n'aurait pas été applicable si on avait définie  $U$  par  $U_{n+1} = \frac{U_n(U_n+2)}{(U_n+1)^2}$

**Corrigé 01**

## Corrigé 01

1/ On considère les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = 3n + 1 \quad v_n = \frac{n}{n+1} \quad w_n = -n^2 + 2n - 1.$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  ont une présentation *fonctionnelle*, ainsi  $v_n = \frac{n}{n+1}$  est la

$$\frac{x}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Lorsque qu'une suite est sous forme *fonctionnelle*, on peut *directement* calculer

Ainsi,  $u_{125} = 3 \times 125 + 1 = 376$ .

$$u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1, u_1 = 3 \times 1 + 1 = 4, u_2 = 3 \times 2 + 1 = 7, u_3 = 3 \times 3 + 1 = 10, \dots$$

On peut remarquer que la suite  $u$  est arithmétique, de raison  $r = +3$ .

$$v_0 = \frac{0}{0+1} = 0, \quad v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad v_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad v_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \quad v_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}, \dots$$

On peut remarquer que  $w_n = -n^2 + 2n - 1 = -(n^2 - 2n + 1)$ , soit  $w_n = -(n-1)^2$ .

$$w_0 = -(0-1)^2 = -1, \quad w_1 = -(1-1)^2 = 0, \quad w_2 = -(2-1)^2 = -1, \quad w_3 = -(3-1)^2 = -4, \dots$$

## Corrigé 02

**2/ On considère les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :**

$$u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \quad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1} \end{cases} \quad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

**Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.**

Les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  ont une présentation *récursive*, c'est-à-dire que l'on ne peut calculer chaque fonction des termes qui le précédent, *de proche en proche*.

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7, \quad u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22,$$

$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67, \quad u_4 = 3u_3 + 1 = 3 \times 67 + 1 = 202.$$

$$v_0 = 2, \quad v_1 = \frac{v_0}{v_0 + 1} = \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}, \quad v_2 = \frac{v_1}{v_1 + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$v_3 = \frac{v_2}{v_2 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}, \quad v_4 = \frac{v_3}{v_3 + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}.$$

Utilisons  $w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1$  sous la forme vue au 1/ :  $w_{n+1} = -(w_n - 1)^2$  :

$$w_0 = 2, \quad w_1 = -(w_0 - 1)^2 = -(2 - 1)^2 = -1, \quad w_2 = -(w_1 - 1)^2 = -(-1 - 1)^2 = -4,$$

$$w_3 = -(w_2 - 1)^2 = -(-4 - 1)^2 = -25, \quad w_4 = -(w_3 - 1)^2 = -(-25 - 1)^2 = -676.$$

**Corrigé 03**

**Corrigé 04**