π

Mathématiques

WP-CMS

Suites numériques 1er et Terminale

Exercices-partie-01

Numéro 01

Documents de référence :

$\longmapsto$

$\longmapsto$

$\longmapsto$

$\longmapsto$

1 Plan du document

2 Rappel de cours

Cliquer sur le numéro de page [26]

3 Quizz sur les suites numériques

Documents de référence :

$\mapsto NiveauPremière$

$\mapsto NiveauTerminale : Limitesdesuites$

$\mapsto NiveauTerminale : Suitesetrécurrence$

4 Exercices – Niveau 1 :

4.1 Exercice 01 :

1/ On considère les suites U, V, W définies sur $\mathcal{N}$ par :

$U_n = 3n+1 \qquad V_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad w_n = -n^2+2n-1$

Calculer les cinq premier termes de chacune des suites.

2/ On considère les suites U, V, W définies sur $\mathcal{N}$ par :

$U \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases} \qquad V \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n}{V_{V_n+1}} \end{cases} \qquad W \begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = -W_n^2 + 2W_n - 1 \end{cases}$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

4.2 Exercice 02 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

$U_n = \dfrac{2n+1}{3n+1} \qquad U_n = \dfrac{-n+4}{-2n+5}$

4.3 Exercice 03 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

$U_n = -\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \qquad U_n = \dfrac{5^{n+1}}{4^n} + 3$

4.4 Exercice 04 :

Soit la suites numérique U_n telle que $U_n = \dfrac{5n}{2+n^2}$ $\forall n \in \mathcal{N}$

1/ Cette suite est-elle monotone, majorée, minorée ? 2/ A partir de quel rang est-elle strictement décroissante ?

5 Exercices – Niveau 2 :

5.1 Exercice 01 :

La suite U_n est définie par $U \begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = -U_n^2 + 5U_n - 4 \end{cases} \quad \forall n \in \mathcal{N}$

1/ Calculer U_1, U_2, U_3

2/ Étudier le sens de variation de la suite U_n .

3/ Quelle valeur aurait-il fallu donner à U_0 pour que la suite soit constante ?

5.2 Exercice 02 :

Soit U_n la suite numérique définie par $U_0 = a$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$

1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ? 2/ Pour tout entier naturel n , exprimer U_{n+2} fonction de U_n . Conclure.

5.3 Exercice 03 :

Soit la suite U_n telle que $U_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $\forall n \in \mathcal{N}$

A - Approche « récurrente » :

1/ Vérifier $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ pour tout entier n .

2/ Montrer que la suite U est croissante. Qu'en conclure ?

3/ Calculer $lim_{x \to +\infty} U_n$

B - Approche « fonctionnelle » :

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

1/ Montrer que f est continue, strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2/ Calculer $lim_{x \to +\infty} f(x)$

3/ Expliquer pourquoi l'approche « fonctionnelle » permet d'obtenir les résultats cherchés dans la partie A , alors qu'elle n'aurait pas été applicable si on avait défini U par $U_{n+1} = \dfrac{U_n(U_n + 2)}{(U_n + 1)^2}$

6 Corrigés – Niveau 1 :

6.1 Corrigé 01

1/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n + 1 \qquad v_n = \frac{n}{n+1} \qquad w_n = -n^2 + 2n - 1 .$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *fonctionnelle* , ainsi $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ est la traduction sur $\mathbb{N}$, de la fonction $f : x \mapsto f(x)$

$\dfrac{x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque qu'une suite est sous forme *fonctionnelle* , on peut *directement* calculer chaque terme de la suite.

Ainsi, $u_{125} = 3\times125 + 1 = 376$.

$u_0 = 3\times0 + 1 = 1$, $u_1 = 3\times1 + 1 = 4$, $u_2 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_3 = 3\times3 + 1 = 10$, $u_4 = 3\times4 + 1 = 13$.

On peut remarquer que la suite u est arithmétique, *de raison* $r = +3$.

$v_0 = \dfrac{0}{0+1} = 0$, $v_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$, $v_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$, $v_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$.

On peut remarquer que $w_n = -n^2 + 2n - 1 = -(n^2 - 2n + 1)$, soit $w_n = -(n-1)^2$.

$w_0 = -(0-1)^2 = -1$, $w_1 = -(1-1)^2 = 0$, $w_2 = -(2-1)^2 = -1$, $w_3 = -(3-1)^2 = -4$, $w_4 = -(4-1)^2 = -9$.

2/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \qquad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{cases} \qquad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1 \end{cases}$$ **pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *récurrente* , c'est-à-dire que l'on ne peut calculer chaque terme de la suite qu'en fonction des termes qui le précédent, *de proche en proche.*

$u_0 = 2$, $u_1 = 3u_0 + 1 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_2 = 3u_1 + 1 = 3\times7 + 1 = 22$,
$u_3 = 3u_2 + 1 = 3\times22 + 1 = 67$, $u_4 = 3u_3 + 1 = 3\times67 + 1 = 202$.

$$v_0 = 2 \ , \ v_1 = \frac{v_0}{v_0+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \ , \ v_2 = \frac{v_1}{v_1+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$v_3 = \frac{v_2}{v_2+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7} = \frac{2}{7} \ , \ v_4 = \frac{v_3}{v_3+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{2}{7}\times\frac{7}{9} = \frac{2}{9}.$$

Utilisons $w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1$ sous la forme vue au 1/ : $w_{n+1} = -(w_n - 1)^2$:
$w_0 = 2$, $w_1 = -(w_0 - 1)^2 = -(2 - 1)^2 = -1$, $w_2 = -(w_1 - 1)^2 = -(-1 - 1)^2 = -4$,
$w_3 = -(w_2 - 1)^2 = -(-4 - 1)^2 = -25$, $w_4 = -(w_3 - 1)^2 = -(-25 - 1)^2 = -676$.

6.2 Corrigé 02

Etudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$ est donnée sous forme *fonctionnelle*, avec $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

1ère méthode :

Il suffit d'étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$, donc le signe de la dérivée $f'(x)$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2(3x+1)-3(2x+1)}{(3x+1)^2} = -\dfrac{1}{(3x+1)^2} < 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

La suite (u_n) est donc *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.

2ème méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+1} - \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{(2n+3)(3n+1)-(2n+1)(3n+4)}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(6n^2+11n+3)-(6n^2+11n+4)}{(3n+1)(3n+4)} = -\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} < 0 \text{ sur } \mathbb{N}.$$

On déduit : $u_{n+1} < u_n$, pour tout n entier naturel, soit (u_n) *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.

b) $u_n = \dfrac{-n+4}{-2n+5}$

Il est préférable d'écrire $u_n = \dfrac{-n+4}{-2n+5} = \dfrac{(-1)(n-4)}{(-1)(2n-5)} = \dfrac{n-4}{2n-5}$.

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-4}{2n-5}$ est également donnée sous forme *fonctionnelle* : $f(x) = \dfrac{x-4}{2x-5}$.

1ère méthode :

Il suffit d'étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$, donc le signe de la dérivée $f'(x)$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où :

$f(x) = \dfrac{x-4}{2x-5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1(2x-5)-2(x-4)}{(2x-5)^2} = \dfrac{3}{(2x-5)^2} > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Attention !

Attention !

La fonction f n'est pas définie en $+\frac{5}{2} = 2{,}5$, donc n'est pas continue en ce point.

Elle peut donc croitre ou décroitre brutalement en ce point.

Or : $u_0 = f(0) = +\frac{4}{5} = 0{,}8$, $u_1 = f(1) = +1$, $u_2 = f(2) = +2$ (f est croissante pour $n \leq 2$)

Par contre : $u_3 = f(3) = -1$ (f est décroissante entre 2 et 3 , du fait de sa non définition en $\frac{5}{2}$, puis redevient croissa

pour $n \geq 3$, comme l'indique la dérivée $f'(x)$).

La suite (u_n) est donc *strictement croissante* sur $\mathbb{N} - \{0 ; 1 ; 2\}$.

2ème méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+4}{2(n+1)-5} - \frac{n-4}{2n-5} = \frac{n+5}{2n-3} - \frac{n-4}{2n-5} = \frac{(n+5)(2n-5)-(n-4)(2n-3)}{(2n-3)(2n-5)} :$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2n^2+5n-25)-(2n^2-11n+12)}{(2n-3)(2n-5)} = \frac{16n-37}{(2n-3)(2n-5)} .$$

$u_{n+1} - u_n$ est du signe de $16n - 37$, qui s'annule en $n = \frac{37}{16} \approx 2{,}31$.

D'où : $u_{n+1} - u_n > 0$ dès que $n \geq 3$, soit $u_{n+1} > u_n$, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 3 .

On conclue : (u_n) *strictement croissante* sur $\mathbb{N} - \{0 ; 1 ; 2\}$.

6.3 Corrigé 03

Etudier le sens de variation des suites numériques suivantes :

a) $u_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^n$

Bien que la suite (u_n) soit exprimée sous forme *fonctionnelle*, on ne peut procéder *par dérivée*, car ces fonctions (*exponentielles*) ne sont pas du programme d'une classe de Première.

$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\frac{5}{4}\right)^n\left(-\frac{5}{4} + 1\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^n < 0$, pour tout entier naturel n.

On déduit : $u_{n+1} < u_n$, pour tout n entier naturel, soit (u_n) *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.

b) $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} + 3$

Bien que la suite (u_n) soit également exprimée sous forme *fonctionnelle*, on ne peut procéder *par dérivée*, car ces fonctions (*exponentielles*) ne sont pas du programme d'une classe de Première.

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{5^{n+2}}{4^{n+1}} + 3\right) - \left(\frac{5^{n+1}}{4^n} + 3\right) = \frac{5^{n+2}}{4^{n+1}} - \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5^{n+1}}{4^n}\left(\frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{1}{4} \times \frac{5^{n+1}}{4^n} = -\frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} = -\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}.$

D'où : $u_{n+1} - u_n < 0$, pour tout entier naturel n.

On déduit : $u_{n+1} < u_n$, pour tout n entier naturel, soit (u_n) *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.

6.4 Corrigé 04

Soit la suite numérique $\{u_n\}$ telle que $u_n = \dfrac{5n}{2+n^2}$, quel que soit n entier naturel.

1/ Cette suite est-elle monotone, majorée, minorée ?

$u_0 = 0$, $u_1 = \frac{5}{3} = 1{,}66$, $u_2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, $u_3 = \frac{15}{11} = 1{,}36$, $u_4 = \frac{20}{18} = \frac{10}{9} = 1{,}11$.

La suite est croissante, puis décroissante, donc n'est pas monotone.

Les premiers termes de la suites semblent indiquer que la suite n'atteint jamais 2 .

Prouvons que 2 est un majorant de cette suite :

$u_n < 2 \iff \dfrac{5n}{2+n^2} < 2 \iff 5n < 4 + 2n^2 \iff 2n^2 - 5n + 4 > 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$. Donc le trinôme est partout du signe de $a = 2$, soit positif.

On peut affirmer que la suite $\{u_n\}$ est majorée par 2 .

Elle est par ailleurs minorée par 0 , puisque $\dfrac{5n}{2+n^2} \geq 0$, $\forall n$ entier naturel.

La suite $\{u_n\}$ est donc bornée.

2/ A partir de quel rang est-elle strictement décroissante ?

$u_{n+1} < u_n \iff \dfrac{5(n+1)}{2+(n+1)^2} < \dfrac{5n}{2+n^2}$.

Les termes étant positifs, on fait le produit en croix, sans envisager de changement de sens :

$(n+1)(2+n^2) < n[2+(n+1)^2] \iff n^3 + n^2 + 2n + 2 < n^3 + 2n^2 + 3n \iff n^2 + n - 2 > 0$.

Ce trinôme admet $n = 1$ et $n = -2$ pour racines.

Il est positif à l'extérieur de ses racines, soit $n < -2$ ou $n > 1$.

n étant un entier naturel, on peut affirmer que la suite est décroissante à partir du terme u_2 , $(u_3 < u_2)$, ce que confirm

les premiers termes de la suite.

7 Corrigés – Niveau 2 :

7.1 Corrigé 05

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = -u_n^2 + 5u_n - 4 \end{cases}$.

1/ Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = -u_0^2 + 5u_0 - 4 = -16 + 20 - 4 = 0$,

$u_2 = -u_1^2 + 5u_1 - 4 = -4$,

$u_3 = -u_2^2 + 5u_2 - 4 = -16 - 20 - 4 = -44$.

2/ Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

$u_{n+1} - u_n = (-u_n^2 + 5u_n - 4) - u_n = -u_n^2 + 4u_n - 4$,

$u_{n+1} - u_n = -(u_n^2 - 4u_n + 4) = -(u_n - 2)^2$.

On déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n.

La suite (u_n) est *décroissante*, ce que l'on pouvait conjecturer sur les premiers termes.

3/ Quelle valeur aurait-il fallu donner à u_0 pour que la suite soit constante ?

(u_n) constante $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après 2/, on déduit qu'il faut $-(u_n - 2)^2 = 0$, soit $u_n = 2$.

On constate en effet qu'en posant $u_0 = 2$, tous les autres termes de la suite valent 2, puisque :

$u_n = 2 \Rightarrow u_{n+1} = -u_n^2 + 5u_n - 4 = -4 + 10 - 4 = 2$.

7.2 Corrigé 06

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ?

$u_0 = a$.

$$u_1 = \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} = \frac{a+1}{a-1} \ .$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} = \frac{\dfrac{a+1}{a-1} + 1}{\dfrac{a+1}{a-1} - 1} = \frac{(a+1)+(a-1)}{(a+1)-(a-1)} = \frac{2a}{2} = a = u_0 \ .$$

$$u_3 = \frac{u_2 + 1}{u_2 - 1} = \frac{a+1}{a-1} = u_1 \ .$$

$$u_4 = \frac{u_3 + 1}{u_3 - 1} = \frac{\dfrac{a+1}{a-1} + 1}{\dfrac{a+1}{a-1} - 1} = a = u_0 \ .$$

La suite semble être périodique, prenant alternativement pour valeurs : a et $\dfrac{a+1}{a-1}$.

2/ Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n . Conclure.

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{u_n+1}{u_n-1} + 1}{\dfrac{u_n+1}{u_n-1} - 1} = \frac{(u_n+1)+(u_n-1)}{(u_n+1)-(u_n-1)} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$, pour tout entier naturel n .

On constate bien la périodicité 2 de la suite (u_n), qui prend donc successivement et répétitivement les valeurs $(u_0 \, , u_1) = \left(a \, , \dfrac{a+1}{a-1}\right)$.

7.3 Corrigé 07

Soit la suite u telle que $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ pour tout entier naturel n .

<u>A - Approche « récurrente »</u> :

1/ Vérifier $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier n .

Comme $n \geq 0$, l'écriture de u_n permet d'affirmer $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, $n(n+2) = n^2 + 2n$, alors que $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, d'où $n(n+2) < (n+1)^2$, dont on déduit $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

soit $u_n < 1$.

2/ Montrer que la suite u est croissante. Qu'en conclure ?

$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ après développement.

On constate bien que $u_{n+1} - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n . La suite u est bien croissante avec n .

Etant croissante, majorée par 1 , la suite u converge vers une limite l telle que $0 \leq l \leq 1$.

3/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$1 - u_n = 1 - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2} = - \frac{1}{(n+1)^2}$ après développement.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

<u>B - Approche « fonctionnelle »</u> : Soit f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

1/ Montrer que f est continue, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, comme rapport de polynômes, sachant que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Donc $f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}$.

Après développement, on obtient $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$. On constate $f'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

f se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$.

1

3/ Expliquer pourquoi l'approche « fonctionnelle » permet d'obtenir les résultats de la partie A , alors qu'elle n'aurai

été applicable si on avait définie u par $u_{n+1} = \frac{u_n (u_n + 2)}{(u_n + 1)^2}$.

L'approche « fonctionnelle » résout les questions posées dans la partie A , parce que u_n est définie sous f

fonctionnelle : $f(n) = \frac{n(n+1)}{(n+2)^2}$.

Par contre, si l'on pose $u_0 = 1$, puis $u_{n+1} = \frac{u_n (u_n + 2)}{(u_n + 1)^2}$, soit $u_{n+1} = f(u_n)$, *forme récurrente*, l'évolution de u ne s

pas nécessairement dans le sens croissant :

Ainsi $u_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$, $u_2 = \frac{33}{49} = 0{,}67$, $u_3 = 0{,}64$ .... .

L'évolution de la suite u n'a plus rien à voir avec les variations de f.

En conclusion, il est fondamental de distinguer les définitions *récurrentes* ou *fonctionnelles* des suites.

8 ANNALES BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

BAC 2025 - Mathématiques

Enoncé

Exercice 4 (5 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.
   On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
   c. Justifier que $\text{L} = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
   a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
   b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
   n=0
   u=1
   while ................ :
      n= ..........
      u= ..........
   return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E_1) : $y' = 0{,}02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' = -0{,}3y + 0{,}02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie A

Partie A

1. On cherche :

$$u_1 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = -0{,}02 + 1{,}3 = 1{,}28$$

La superficie recouverte par la posidonie au 1er juillet 2025 est donc 1,28 ha.

2. a. Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1; 20]$ Et on a vu que $u_1 = 1{,}28 \geq u_0$

Hérédité : supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

h est croissante sur $[0; 20]$ (admis), donc :

$$u_{n+1} = h(u_n) \geq h(1) = u_1 \geq 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq h(20) = -0{,}02 \times 400 + 1{,}3 \times 20 = -8 + 26 = 18$$

Donc $u_{n+1} \leq 20$

Et comme h croissante, on a $u_{n+1} = h(u_n) \geq h(u_{n-1}) = u_n$

Conclusion : la suite est croissante, majorée par 20, et $u_n \geq 1$.

2. b. La suite est croissante et majorée, donc elle converge. On note sa limite L.

2. c. À la limite, on a $\lim\ u_n = L$, donc :

$$L = -0{,}02L^2 + 1{,}3L \Rightarrow 0 = -0{,}02L^2 + 0{,}3L \Rightarrow 0 = L(-0{,}02L + 0{,}3) \Rightarrow L = 0 \quad \text{ou} \quad L = \frac{0{,}3}{0{,}02} = 15$$

Mais la suite est toujours ≥ 1 donc $L = 15$

3.a. Le modèle est croissant, donc à partir d'un certain rang n, $u_n > 14$. Cela arrivera forcément puisque la limite est 15 > 14.

3.b. Complétons l'algorithme :

```
def seuil():
   n = 0
   u = 1
   while u <= 14:
      n = n + 1
      u = -0.02 * u**2 + 1.3 * u
   return n
```

Partie B

Partie B

1. On dérive g :

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{0{,}02f(t)(15 - f(t))}{f(t)^2} = -0{,}02\frac{15 - f(t)}{f(t)} = -0{,}3 + 0{,}02g(t)$$

Donc :

$$g'(t) = -0{,}3 + 0{,}02g(t) \Rightarrow g'(t) = -0{,}3g(t) + 0{,}02$$

On a bien montré que g est solution de (E2).

2. C'est une équation linéaire du 1er ordre. On peut écrire :

- Solution de l'équation homogène : $y_h(t) = Ce^{-0{,}3t}$
- Une solution particulière : $y_p(t) = \frac{0{,}02}{0{,}3} = \frac{1}{15}$

Donc la solution générale est :

$$y(t) = Ce^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}$$

3. Rappel : $g(t) = \frac{1}{f(t)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{g(t)}$

Donc :

$$f(t) = \frac{1}{Ce^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{15Ce^{-0{,}3t} + 1}$$

Utilisons $f(0) = 1$ pour déterminer C :

$$f(0) = \frac{15}{15C + 1} = 1 \Rightarrow 15C + 1 = 15 \Rightarrow C = \frac{14}{15}$$

Donc :

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1}$$

4. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \frac{15}{0+1} = 15$

Donc la superficie tend vers 15 ha avec le temps, comme dans le modèle discret.

5. On cherche :

$$f(t) > 14 \Rightarrow \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1} > 14 \Rightarrow \frac{1}{14e^{-0{,}3t} + 1} > \frac{14}{15}$$

On inverse (car les deux membres sont positifs) :

$$14e^{-0,3t} + 1 < \frac{15}{14} \Rightarrow 14e^{-0,3t} < \frac{15}{14} - 1 = \frac{1}{14} \Rightarrow e^{-0,3t} < \frac{1}{196} \Rightarrow -0,3t < \ln\left(\frac{1}{196}\right) \Rightarrow t > \frac{-\ln\left(\frac{1}{196}\right)}{0,3} = \frac{\ln(196)}{0,3}$$

$$\ln(196) = \ln(14^2) = 2\ln(14) \approx 2 \times 2,639 = 5,278 \Rightarrow t > \frac{5,278}{0,3} \approx 17,59$$

Donc, au bout de 18 ans, la superficie dépassera les 14 ha.

Interprétation : D'après le modèle continu, la posidonie dépassera 14 hectares aux alentours de l'année 2042.

BAC 2024 - Mathématiques

Enoncé

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Partie A

__Exercice 1 :__ **Vrai ou faux (fonctions et suites)**

1.

Affirmation 1 : Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 5xe^{-x} = \frac{5x}{e^x}$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par produit.

Donc, C_f admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $x = 0$, soit l'axe des abscisses. Donc **l'affirmation est vraie.**

Affirmation 2 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$

D'où : pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$. Donc f est solution de (E).

Ainsi, **l'affirmation est vraie.**

2.

Affirmation 3 : On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = -1, v_n = \cos(n)$ et $w_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Pourtant, la suite (v_n) n'admet pas de limite en $+\infty$. C'est un contre-exemple.

Donc, **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 4 : On a supposé que la suite (u_n) est croissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$.

De même, comme la suite (w_n) est décroissante, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \leq w_0$.

Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq v_n \leq w_n$.

Donc, **l'affirmation est vraie.**

BAC 2023 - Mathématiques

Enoncé

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90% des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3$.

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n .$$
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)} .$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ. Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ? Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Partie A

Première modélisation

1. $u_1 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_2 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$. Au 2ème mois de la FAQ, la modélisation prévoit 400 questions et au 3ème mois elle en prévoit 490.

2. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ la propriété "$u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$".

   Initialisation : $u_0 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3$. Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   Hérédité : soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(N)$ est vraie, *i.e.* $u_N = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N$. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$.
   On part de la définition de la suite

   $$u_{N+1} = 0,9u_N + 1,3 = 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N\right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1}$$

   C'est $\mathcal{H}(N+1)$!
   Conclusion : on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
   La propriété est démontrée par principe de récurrence.

3. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = \dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \dfrac{10}{9} \times 0,9^n = 0,9^{n-1} \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4. Ce programme renvoie le premier rang N tel que $u_N > p$. Dans le cas présent,

   $$u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < 4,5 \times 0,09 \iff 0,9^n < 0,405$$

   Par application du log strictement croissant sur $\mathbb{R}_*^+$,

   $$n \log(0,9) < \log(0,405) \iff n > \frac{\log(0,405)}{\log(0,9)} \iff n > 8,57$$

   Le programme renvoie donc $N = 9$.

Partie B

Une autre modélisation

1. $v_1 = 9 - 6 = 3,00$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq 4,04$.
2. On cherche n tel que $v_n = 8,5$:

$$9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 8,5 \iff e^{-0,19(n-1)} = \frac{0,5}{6} \iff -0,19(n-1) = -\ln(12) \iff n = 1 + \frac{\ln(12)}{0,19}$$

On trouve après calculs $n = 15$.

Partie C

Comparaison des deux modèles

1. Il s'agit de comparer les questions A.4. et B.2. . La première modélisation dépasse les 850 questions au 9ème mois alors que la deuxième ne les dépasse qu'au 15ème mois. La première modélisation conduit donc à la modification la plus prématurée.
2. Il s'agit en fait de calculer les limites des deux suites (u_n) et (v_n). Le cours sur les suites géométriques nous assure que pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13$$

De plus, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-n) = 0$ donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 \times 0 = 9$$

La 1ère modélisation prévoit le plus de questions : au maximum 1300 alors que la 2ème modélisation n'en prévoit que 900.

9 Rappel de cours

Suites Numériques - Forme *fonctionnelle* ou *récurrente*.

On appelle ***suite numérique*** toute fonction $u : n \in \mathbb{N} \rightarrow u(n) \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : Toute fonction f peut devenir ***suite***. Il suffit que son domaine de définition soit $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

Ainsi :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ devient $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $u(n) = \dfrac{2n-3}{n+1}$.

L'usage veut que l'image $u(n)$ soit notée u_n (u indice n) :

$u_0 = -3$, $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{3}{4}$ ......

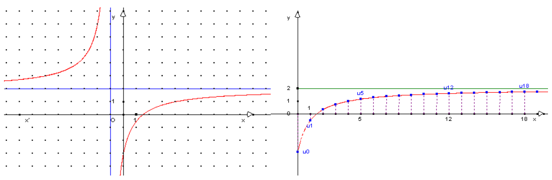
Une *suite* est sous ***forme fonctionnelle*** si la formule proposée pour u_n est directement transposable en écriture « fonction », donc permet le ***calcul immédiat de*** u_n ***pour toute valeur de*** n.

$u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ est une forme fonctionnelle : $u_{23} = \dfrac{43}{24}$.

Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme fonctionnelle : $u_{n+1} = f(n)$.

A l'identique des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une suite numérique possède une représentation graphique, constituée des seuls points d'abscisses entières $x = n$.

Exemple : Graphe de $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$. On l'extrait de celui de $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.



Une *suite* est sous ***forme récurrente*** si la formule proposée pour u_n n'est pas directement transposable en écriture « fonction », et ne permet le *calcul de* u_n *que* ***de proche en proche***, à partir des ordres précédents.

$u_n = 2u_{n-1} + 1$ est une forme récurrente.

Chaque terme est le double de celui qui le précède, augmenté de **1**.

Si $u_0 = -3$, on déduit $u_1 = 2u_0 + 1 = -5$, $u_2 = 2u_1 + 1 = -9$, $u_3 = 2u_2 + 1 = -17$ .....

Pour amorcer une suite récurrente, il faut en connaître un ou plusieurs termes, et la façon de passer d'un ou plusieurs termes de la suite à leur successeur (relation de récurrence).

La majorité des problèmes de *suites*, consiste à retrouver l'écriture *fonctionnelle*, à partir de l'écriture *récurrente*.

Une suite sous forme récurrente n'étant qu'une autre présentation d'une suite fonctionnelle, elle admet également un graphe, mais il faut calculer, de proche en proche, chaque *ordonnée* u_n pour chaque *abscisse* n.

Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme récurrente :

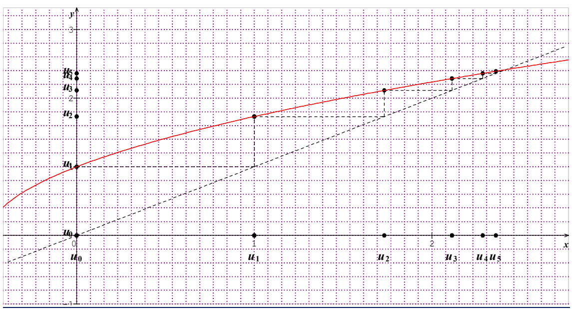
$u_{n+1} = f(u_n)$ + valeur de départ u_0 ou u_1.

On trace le graphe de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi que la 1ère bissectrice des axes $y = x$.

- Partant de l'abscisse u_0 (par exemple), on cherche son ordonnée $u_1 = f(u_0)$ à la verticale, sur C_f.
- On mène ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_1(u_1 ; u_1)$ (u_1 en abscisse et en ordonnée).
- On mène ensuite la verticale jusqu'à l' ordonnée $u_2 = f(u_1)$ à la verticale, sur C_f.
- On mène ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_2(u_2 ; u_2)$ (u_2 en abscisse et en ordonnée).
- On réitère le processus pour les autres valeurs de u_n.

On peut éventuellement constater que les valeurs de u_n s'accumulent au point $E(L ; L)$ d'intersection entre C_f et la bissectrice $y = x$. On peut alors affirmer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple : Soit la suite u telle que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$, avec $u_0 = 0$. Tracer la courbe représentative de u :



On constate que la suite u est ***croissante***, ***bornée par*** 0 ***et*** $L = 1 + \sqrt{2}$ ***limite de la suite, solution de*** $f(x) = x$.

Suite monotone :

Une suite numérique est dite ***monotone*** (croissante ou décroissante) si la progression de ses termes successifs l'est, c'est à dire ne s'inverse jamais.

u ***croissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $\forall n \in N$.

u ***décroissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ $\forall n \in N$.

Soit $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, vérifions que u est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Le résultat est positif pour tout entier positif n.

D'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ u ***croissante.***

Le graphe ci-dessus de la suite vérifie ce résultat, on constate bien que les valeurs u_n croissent avec n, et on les voit se bloquer sur la hauteur $y = 2$ de l'asymptote horizontale, ce dont on parlera plus bas.

Suite majorée , minorée , bornée :

Une suite est dite ***majorée*** (ou ***minorée***) si et seulement si tous ses termes u_n restent ***inférieurs*** (ou ***supérieurs***) à une quantité A appelée ***Majorant*** (ou ***minorant***) de la suite.

u majorée par A $\Leftrightarrow$ $u_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

u minorée par B $\Leftrightarrow$ $u_n \geq B$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

u bornée par A et B $\Leftrightarrow$ $A \leq u_n \leq B$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vérifions, pour la suite précédente, qu'elle est majorée par 2, comme l'exprime son graphe.

Pour des commodités de calcul, plutôt que de montrer $u_n \leq 2$, on compare à 0,

soit $u_n - 2 \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n - 2 = \dfrac{2n-3}{n+1} - 2 = \dfrac{(2n-3)-2(n+1)}{n+1} = -\dfrac{5}{n+1} \leq 0$ pour tout entier naturel n.

La suite est majorée par 2 . *Toute valeur supérieure à 2 est également majorant de la suite, mais son graphe semble indiquer que 2 est le plus petit de ces majorants.*

Convergence - Divergence d'une suite numérique :

Si, lorsque l'ordre n s'accroît jusqu'à devenir infini, les termes u_n de la suite se concentrent sur une valeur L jusqu'à se confondre avec elle, la suite est dite ***convergente vers*** L , ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

(qui est lu : « limite de u_n égal L »).

Pour $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, selon le rapport des plus hauts degrés, on vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Si, au contraire, les termes u_n tendent vers l'infini lorsque $n \rightarrow +\infty$, la suite est dite *divergente*.