π

WP-CMS

Mathématiques

Suites numériques 1er et Terminale

Fiche de synthèse

Numéro 01

⟼ *Documentderéférence*

⟼ *Mémo − vecteurs, droitesetplandansl′espace*

⟼ *Vecteurs − exercices − partie − 2*

⟼ *Vecteurs − matrice − exemple − concret*

1 Plan du document

2 Suites antithétiques

2.0.1 Définition :

Une suite U est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathcal{R}$ tel que pour tout $n \in I$ $U_{n+1} = U_n + r$
Le réel r est la **raison** de la suite.

La relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n + r$

La formule explicite : $U_n = U_0 + nr$ ou $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + r \end{cases}$

2.0.2 Remarques :

- La formule explicite se généralise : $U_n = U_p + (n-p)r$
- La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés, car une suite arithmétique est une fonction affine définie sur $\mathcal{N}$ (on rappelle que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite).

2.0.3 Sens de variation :

Une suite arithmétique est
- **constante** si $r = 0$,
- strictement **croissante** si $r > 0$,
- strictement **décroissante** si $r < 0$.

Exemples :

- $U_{n+1} = U_n + 4$ (suite arithmétique de raison 4).
- $V_n = 5 - 3n$ (suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 5)
- $U_n = U_0 + nr$
  Si on connaît un terme et la raison.Alors on peut calculer n'importe quel terme.$U_{20} = U_{10} + 10 * r$
- On peut aussi retrouver la raison à partir de deux termes éloignés.
  Si $U_3 = 10$ et $U_7 = 34$. Alors la raison est 6 $(4 * 6)$ cart on a avance de 24 $(34 - 10)$ en 4 termes $(7 - 3)$.

2.0.4 somme des termes :

Somme de tous les termes : $\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + ... + U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Somme à partir d'un rang p : $\sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + ... + U_n = (n - p + 1) * \dfrac{U_p + U_n}{2}$

3 Suites géométriques

3.1 Définition :

Une suite U est dite géométrique s'il existe $q \in \mathscr{R}$ tel que pour tout $n \in I$ $U_{n+1} = U_n * q$
Le réel q est la **raison** de la suite.

La relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n * q$

La formule explicite : $U_n = U_0 + q^n$

3.1.1 Remarques :

- La formule explicite se généralise : $U_n = U_p + q^{(n-p)}$

3.1.2 Sens de variation :

Une suite géométrique est
- Si $U_0 > 0$ Alors
U est strictement **croissante** si $Q > 1$
U est strictement **décroissante** si $0 < q < 1$
U est **constante** si $q = 0$ (tous les termes sont nuls) ou si $q = 1$

- Si $U_0 < 0$ Alors
U est strictement **décroissante** si $0q > 1$
U est strictement **croissante** si $0 < q < 1$
U est **constante** si $q = 0$ (tous les termes sont nuls) ou si $q = 1$

- Si $Q < 0$ Alors La suite est dite **alterné** (ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

Exemples :

$U_{n+1} = -2U_n$ (suite géométrique de raison -2)
$V_n = 5 * (\frac{1}{3})^n$ (suite arithmétique de raison 1/3 et de premier terme 5))

3.1.3 somme des termes :

Pour $q \neq 1$ **Somme de tous les termes** : $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 * \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$

Pour $q \neq 1$ **Somme à partir d'un rang** p : $\sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + ... + U_n = (U_p) * \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$

4 Suites arithmético-géométriques

4.1 Définition :

Une suite U est dite **arithmético-géométriques** s'il existe $a et b \in \mathscr{R}$ tel que pour tout $n \in I$ $U_{n+1} = aU_n + b$

4.1.1 Remarques :

- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle $a = 1$
- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle $b = 0$

Recherche de la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique U :
1) On construit une suite géométrique V telle que $V_n = U_n - \alpha(\alpha \in \mathscr{R})$
2) On exprime V_n en fonction de n (formule explicite).
3) On en déduit l'expression de U_n

Exemple :

$U_{n+1} = 3U_n - 1$ et $U_0 = 2$

1) On pose $V_n = U_n - \alpha$
$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = 3U_n - 1 - \alpha$

$U_n = V_n + \alpha$
d'où $V_{n+1} = 3(v_n + \alpha) - 1 = 3V_n + 3\alpha - 1 - \alpha$
$V_n = 3V_n + 2\alpha - 1$

Pour que V soit une suite géométrique, il faut qu'il existe q tel que $V_{n+1} = V_n * q$
On a donc : $q = 3et2\alpha - 1 = 0$
$2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha\frac{1}{2}$

$V_{n+1} = 3V_n \Rightarrow V_n = V_0 * 3^n \Rightarrow V_0 = U_0 - \alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$V_n = \frac{3}{2} * 3^n \Rightarrow U_n = V_n + \alpha$
d'où $U_n = \frac{3}{2} * 3^n + \frac{1}{2}$ (formule explicite de la suite u)

5 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer certaines propriétés de suites à partir de leur relation de récurrence.
Par ailleurs, ce raisonnement n'est pas uniquement valable pour les suites.

5.1 Principe de récurrence :

Soit une proposition P_n dépendant d'un entier n (son rang).
Pour démontrer que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, il suffit de démontrer que :
1) la proposition P_{n0} est vraie.
2) si P_p est vraie (avec $p > n_0$) alors P_{p+1} est vraie.

L'étape 1) est l'initialisation du raisonnement par récurrence.
L'étape 2) est la démonstration de l'hérédité de la propriété.

Exemple :

$S_n = \sum_{k^n=02^k}$ Démontrer que pour tout entier $n > 0$ la proposition « $S_n = 2^{n+1} - 1$» est vraie.

Initialisation
$S_1 = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ et $2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité
Soit un entier $p > 0$. Supposons que $S_p = 2^{p+1} - 1$
Alors $S_{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} 2^k = S_p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1}$
$S_{p+1} = 2 * 2^{p+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$
$S_{p+1} = 2^{(p+1)+1} - 1$
Donc si la proposition est vraie pour $p > 0$ alors elle est vraie pour $p + 1$
La proposition est héréditaire.

Conclusion : La proposition «$S_n = 2^{2+1} - 1$» est vraie pour $n = 1$, et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n > 0$.

6 Limites se suites

6.0.1 Convergence :

Si une suite a une limite finie ($lim_{n\longrightarrow+\infty}$) , Alors on dit qu'elle est **convergente**.
Exemple : $U_n = 10 - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = 10$
Dans le cas contraire (limite infinie ou absence de limite), on dit qu'elle est **divergente**.
Exemple : $U_n = n \Rightarrow lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = +\infty$ | $U_n = -n \Rightarrow lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = -\infty$ | $U_n = (-1)^n$ (pas de limite).

6.0.2 Unicité de la limite :

Si une suite est convergente Alors elle admet une **unique limite**.

6.0.3 Limite d'une suite arithmétique :

- Si $r > 0$ Alors la suite **tend vers** $+\infty$
- Si $r < 0$ Alors la suite **tend vers** $-\infty$

6.0.4 Limite d'une suite géométrique :

- Si $q > 1$ et si $U_{0>0}$ Alors la suite **tend vers** $+\infty$ (elle est divergente)
- Si $q > 1$ et si $U_{0<0}$ Alors la suite **tend vers** $-\infty$ (elle est divergente)
- Si $0 < q < 1$ Alors la suite **tend vers** 0 (elle est convergente)
- Si $q < 0$ Alors la suite la suite n'a pas de limite(elle est divergente)

6.0.5 Limites de suites usuelles :

$lim_{n\longrightarrow\infty} n = +\infty$	$lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$lim_{n\longrightarrow\infty} n^2 = +\infty$	$lim_{n\longrightarrow\infty} n^3 = +\infty$	$lim_{n\longrightarrow\infty} n^p = +\infty$ $(p > 0)$
$lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n} = 0$	$lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$	$lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$	$lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{\sqrt{p}} = 0$ $(p > 0)$
$lim_{n\longrightarrow\infty} k = k$	-	-	-	-

6.0.6 Théorèmes de comparaison de limites :

Soient deux suites U et V de limites respectives l et l'.
Si à partir d'un certain rang $U_n \geqslant V_n$ alors $l \geqslant l'$

Soient deux suites U et V telles que $U_n \geqslant V_n$ à partir d'un certain rang.
- Si $lim_{n\longrightarrow\infty} V_n = +\infty$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty} U_n = +\infty$
- Si $lim_{n\longrightarrow\infty} U_n = -\infty$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty} V_n = -\infty$

6.0.7 Théorème de convergence monotone :

- Si une suite U est **croissante et majorée** (à partir d'un certain rang $U_n \leqslant M$) Alors elle est **convergente** (avec $l \leqslant M$)

- Si une suite U est **décroissante et minorée** (à partir d'un certain rang $U_n \geqslant m$) Alors elle est **convergente** (avec $l \geqslant m$)

6.1 Propriété pour les suites monotones non bornées :

- Si une suite U est croissante et non majorée alors $lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \longrightarrow +\infty$
- Si une suite U est décroissante et non minorée alors $lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \longrightarrow -\infty$

6.1.1 Théorème des gendarmes :

Soient un réel l et trois suites $U, V\ et\ W$ telles qu'à partir d'un certain rang $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$
Si $lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = l$ et $lim_{n\longrightarrow+\infty} W_n = l$ Alors $lim_{n\longrightarrow+\infty} V_n = l$

6.2 Opérations sur les limites :

- Limite de $U + V$

$lim_{n\longrightarrow+\infty} V_n$ \ $lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-
$-\infty$	$-\infty$	-	$-\infty$

- Limite de $U * V$

$lim_{n\longrightarrow+\infty} V_n$ \ $lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n$	$l\ l > 0$	$l\ l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' avec l' > 0$	$l * l'$	$l * l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' avec l' < 0$	$l * l'$	$l * l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	-	-
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-	$-\infty$	$-\infty$

- Limite de $\frac{1}{U}$

$lim_{n \longrightarrow +\infty} V_n$	$lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{U_n}$
l avec $l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

- Limite de $\frac{U}{V}$

$lim_{n \longrightarrow +\infty} U_n$ \ $lim_{n \longrightarrow +\infty} V_n$	$l\ l > 0$	$l\ l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' avec l' > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' avec l' < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0_+	$+\infty$	$-\infty$	-	$+\infty$	$-\infty$
0_-	$-\infty$	$+\infty$	-	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	-	-
$-\infty$	0	0	0	-	-

7 Formes indéterminées

7.1 Forme $-\infty + \infty$ ou $+\infty - \infty$

Exemple : $lim_{n \longrightarrow +\infty} n^3 - n^2 + 1$
Il y a une forme indéterminée de type $+\infty - \infty$ car $lim_{n \longrightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $lim_{n \longrightarrow +\infty} - n^2 = -\infty$
Méthode :
Quand il y a une forme indéterminée du type $-\infty + \infty$ ou $+\infty - \infty$: 1. On factorise l'expression par son terme de plus haut degré. 2. On utilise les règles de calcul sur la limite d'un produit Exemple :
$n^3 - n^2 + 1 = n^3 \left(1 - \frac{n^2}{n^3 + \frac{1}{n^3}}\right) = n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$ donc $[a \mapsto \infty\ b \mapsto 1\ c \mapsto 0\ d \mapsto 0]$ Donc l'expression $\mapsto +\infty$

7.2 Forme $\infty 0$

Exemple : $lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{n} * \frac{1}{n}$
Il y a une forme indéterminée de type $\infty 0$
Méthode :
Dans ce cas, on peut essayer de multiplier les deux suites entre elles pour se ramener à un quotient.
Exemple :

$$lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{n} * \frac{1}{n} = lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^1} = lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{(\frac{1}{2} - 1)}$$

$$= lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{2}} = lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

7.3 Forme $\infty \div \infty$

En général, cela se produit en présence d'un quotient de deux polynômes. Dans ce cas, on factorise le haut et le bas par le terme de plus haut degré du polynôme le plus petit.

Méthode :

- Pour $\frac{n^4 + n^2 + 1}{n^3 + n}$ on factorise par n^3
- Pour $\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ on factorise par n^2

Ensuite, on utilise les règles sur les limites d'une somme et d'un quotient.

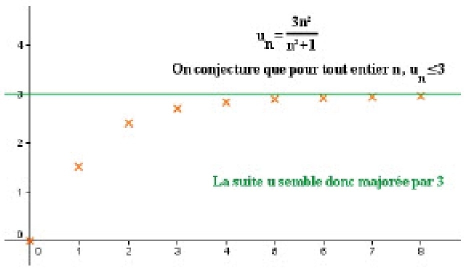
8 Suites Majorée ou Minorée :

On dit qu'une **suite** U est **majorée**

S'il existe $M \in \mathscr{R}$ tel que $\forall n \in \mathscr{N}$, $U_n \leqslant M$

Le nombre M est alors appelé un **majorant** de la suite U

La suite U_n avec $n > 0$ définie par $\forall n \in \mathscr{N}$ relatif, $U_n = \frac{1}{n}$ majorée par 1 car $\forall n \in \mathscr{N}$ relatif $\neq 0$ on a $U_n \leqslant 1$.



On dit qu'une **suite** U est **minorée**

S'il existe $m \in \mathscr{R}$ tel que $\forall n \in \mathscr{N}$, $U_n \geqslant m$

Le nombre m est alors appelé un **minorant** de la suite U

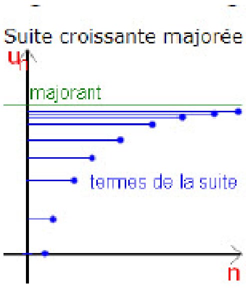
-. -

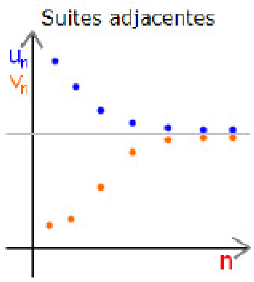
On dit que la suite U est **bornée** S'il elle est à la fois **majorée** et **minorée**.

- Suite **croissante** et **majorée** est **convergente**
- Suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**
- Suite **croissante** est toujours **minorée** par son premier terme.
- Suite **décroissante** est toujours **majorée** par son premier terme.
- Suite monotone peut être convergente ou divergente

  Si deux suites sont adjacentes,

  Alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.



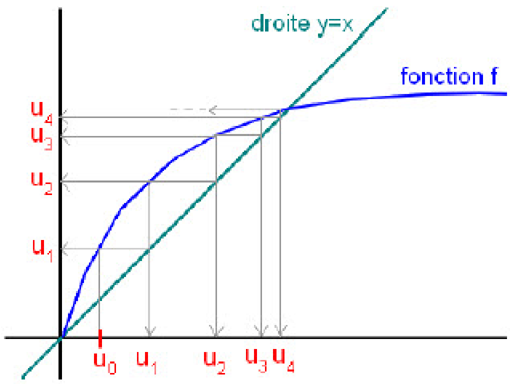


9 Suite définie par récurrence :

Une suite définie par récurrence est une suite dont on connaît un terme et une relation reliant pour tout n le terme U_{n+1} au terme U_n.

Exemple : la suite $\begin{cases} U_0 = 25 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$ est définie par récurrence.

Calcul :
Appelons f la fonction qui donne U_{n+1} en fonction de U_n.



Si f est continue et que U est convergente,
- en appelant l la limite de U
- et en calculant la limite quand $n \mapsto \infty$ des deux membres de la relation de récurrence
Si on obtient l'égalité $l = f(l)$.
Alors cette équation permet généralement de calculer la valeur de 1
Puis
On rapporte U_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$: depuis U_1 sur l'axe des ordonnées,
On se déplace horizontalement vers cette droite puis une fois qu'on la touche, on descend vers l'axe des abs-

cisses.
Comme $U_2 = f(U_1)$, on peut ensuite avec la courbe de f placer U_2 sur l'axe des ordonnées.
Enfin, comme pour U_1, on rapporte ensuite sa valeur sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$.
On renouvelle ensuite ces étapes afin d'avoir U_3, U_4, etc. sur l'axe des abscisses.
Au bout d'un moment, on peut deviner Si la suite est convergente, et Si oui, quelle est sa limite.

10 Raisonnement par récurrence :

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement qui permet de démontrer qu'une propriété qui dépend d'un entier naturel n est vraie pour tout $\mathcal{N}$.

Exemple : un raisonnement par récurrence permet de démontrer que $4^n - 1$ est toujours un multiple de 3.

Méthode : Appeler P_n="la propriété que l'on veut démontrer". On pose donc "$P_n = 4^n - 1$ est un multiple de 3".
Montrer que P_0 est vraie. Ici P_0 est vraie, car $4 * 0 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 3.
Montrer que $\forall n \in \mathcal{N}$, Si P_n est vraie, Alors P_{n+1} est encore vraie.
Rédiger : "Soit $n \in \mathcal{N}$. Supposons que P_n soit vraie".
Montrer que P_{n+1} est encore vraie, donc $4n + 1 - 1$ est un multiple de 3
C'est l'étape la plus difficile, mais après quelques calculs, on y arrive.

$4^n - 1 = 4^n * 4 - 1 = 4^n(3+1) - 1 = 4^n * 3 + 4^n * 1 - 1 = 4^n * 3 + 4^n - 1$

$4^n * 3$ est bien sûr un multiple de 3.
$4^n - 1$ est un multiple de 3 car $P_n$est vraie.
La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 donc $4^n * 3 + 4^n - 1$ est un multiple de 3.
Donc $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3, donc P_{n+1} est vraie.

Donc, comme P_0 est vrai et que $n \in \mathcal{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, on $P_0 \Rightarrow P_1$, donc P_1 est vrai, puis $P_1 \Rightarrow P_2$ donc donc P_2 est vrai, etc.
Donc P_n est vraie $\forall n$.

Rédiger : "Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n".

11 Exercices corrigés – Niveau 1 :

11.1 Exercice 01 :

1/ On considère les suites U, V, W définies sur $\mathcal{N}$ par :
$U_n = 3n+1$ $\quad V_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad w_n = -n^2+2n-1$
Calculer les cinq premier termes de chacune des suites.

2/ On considère les suites U, V, W définies sur $\mathcal{N}$ par :
$U\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n+1 \end{cases}$ $\quad V\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n}{V_{V_n+1}} \end{cases}$ $\quad W\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = -W_n^2+2W_n-1 \end{cases}$
Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

11.2 Exercice 02 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :
$U_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$ $\quad U_n = \dfrac{-n+4}{-2n+5}$

11.3 Exercice 03 :

Étudier le sens de variation des suites numériques suivantes :
$U_n = -\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ $\quad U_n = \dfrac{5^{n+1}}{4^n}+3$

11.4 Exercice 04 :

Soit la suites numérique U_n telle que $U_n = \dfrac{5n}{2+n^2}$ $\forall n \in \mathcal{N}$
1/ Cette suite est-elle monotone, majorée, minorée ? 2/ A partir de quel rang est-elle strictement décroissante ?

12 Exercices corrigés – Niveau 2 :

12.1 Exercice 01 :

La suite U_n est définie par $U\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = -U_n^2+5U_n-4 \end{cases}$ $\forall n \in \mathcal{N}$
1/ Calculer U_1, U_2, U_3
2/ Étudier le sens de variation de la suite U_n .
3/ Quelle valeur aurait-il fallu donner à U_0 pour que la suite soit constante ?

12.2 Exercice 02 :

Soit U_n la suite numérique définie par $U_0 = a$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{U_n+1}{U_n-1}$
1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ? 2/ Pour tout entier naturel n , exprimer U_{n+2} fonction de U_n . Conclure.

12.3 Exercice 03 :

Soit la suite U_n telle que $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $\forall n \in \mathcal{N}$

A - Approche « récurrente » :

1/ Vérifier $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ pour tout entier n .

2/ Montrer que la suite U est croissante. Qu'en conclure?

3/ Calculer $lim_{x\to+\infty} U_n$

B - Approche « fonctionnelle » :

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ telle que $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

1/ Montrer que f est continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2/ Calculer $lim_{x\to+\infty} f(x)$

3/ Expliquer pourquoi l'approche « fonctionnelle » permet d'obtenir les résultats cherchés dans la partie A , alors qu'elle n'aurait pas été applicable si on avait définie U par $U_{n+1} = \frac{U_n(U_n+2)}{(U_n+1)^2}$

Corrigé 01

1/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n+1 \qquad v_n = \frac{n}{n+1} \qquad w_n = -n^2 + 2n - 1 .$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *fonctionnelle* , ainsi $v_n = \frac{n}{n+1}$ est la traduction sur $\mathbb{N}$, de la fonction $f : x \mapsto f(x)$

$\frac{x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque qu'une suite est sous forme *fonctionnelle* , on peut *directement* calculer chaque terme de la suite.

Ainsi, $u_{125} = 3\times125 + 1 = 376$.

$u_0 = 3\times0 + 1 = 1$, $u_1 = 3\times1 + 1 = 4$, $u_2 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_3 = 3\times3 + 1 = 10$, $u_4 = 3\times4 + 1 = 13$.

On peut remarquer que la suite u *est* arithmétique, *de raison* $r = +3$.

$v_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $v_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $v_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$.

On peut remarquer que $w_n = -n^2 + 2n - 1 = -(n^2 - 2n + 1)$, soit $w_n = -(n-1)^2$.

$w_0 = -(0-1)^2 = -1$, $w_1 = -(1-1)^2 = 0$, $w_2 = -(2-1)^2 = -1$, $w_3 = -(3-1)^2 = -4$, $w_4 = -(4-1)^2 = -9$.

Corrigé 02

2/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \qquad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{cases} \qquad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1 \end{cases}$$ **pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *récurrente* , c'est-à-dire que l'on ne peut calculer chaque terme de la suite qu'en fonction des termes qui le précédent, *de proche en proche*.

$u_0 = 2$, $u_1 = 3u_0 + 1 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_2 = 3u_1 + 1 = 3\times7 + 1 = 22$,
$u_3 = 3u_2 + 1 = 3\times22 + 1 = 67$, $u_4 = 3u_3 + 1 = 3\times67 + 1 = 202$.

$$v_0 = 2 \ , \ v_1 = \frac{v_0}{v_0+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \ , \ v_2 = \frac{v_1}{v_1+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$v_3 = \frac{v_2}{v_2+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7} = \frac{2}{7} \ , \ v_4 = \frac{v_3}{v_3+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{2}{7}\times\frac{7}{9} = \frac{2}{9}.$$

Utilisons $w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1$ sous la forme vue au 1/ : $w_{n+1} = -(w_n - 1)^2$:
$w_0 = 2$, $w_1 = -(w_0 - 1)^2 = -(2 - 1)^2 = -1$, $w_2 = -(w_1 - 1)^2 = -(-1 - 1)^2 = -4$,
$w_3 = -(w_2 - 1)^2 = -(-4 - 1)^2 = -25$, $w_4 = -(w_3 - 1)^2 = -(-25 - 1)^2 = -676$.

Corrigé 03

Corrigé 04